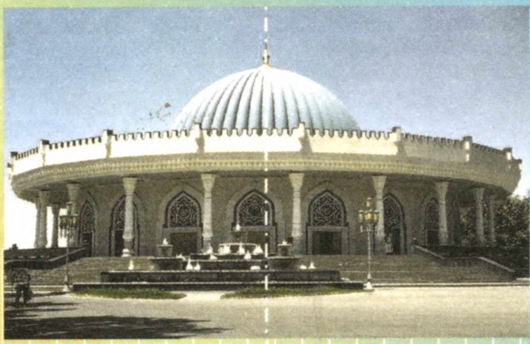
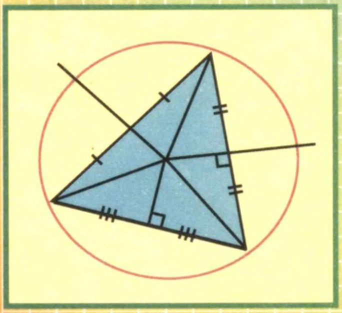
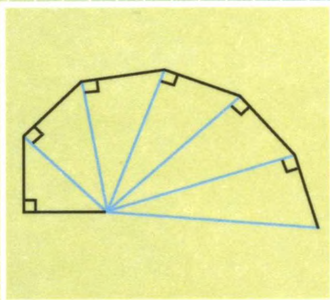
GEOMETRIYA

8

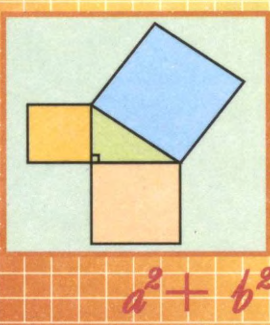


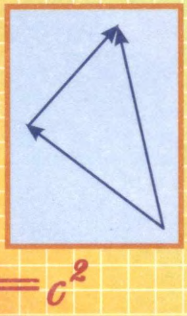
$S=\frac{1}{2}ah$

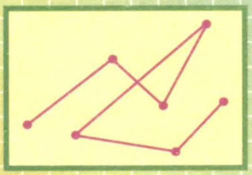




$d=2r$







$S=ab$

$a^2+b^2=c^2$

A. A. RAHIMQORIYEV

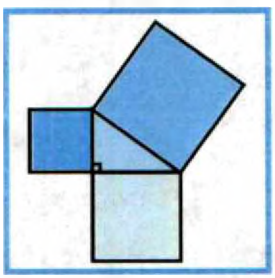
GEOMETRIYA

8

UMUMIY O'RTA TA'LIM MAKTABLARINING
8- SINFI UCHUN DARSLIK

O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligi tomonidan
nashrga tavsiya etilgan

Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2- nashri



TOSHKENT
«YANGIYO'L POLIGRAPH SERVICE»
2010

R 33 Rahimqoriyev A.A.
Geometriya 8. Umumiy o'rta ta'lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik. Qayta ishlangan va to'ldirilgan 2- nashri.
A.A. Rahimqoriyev. — T.: Yangiyo'l poligraph service, 2010. -160 b.

BBK 22.151 ya 721

Taqrizchilar:

G.E. Yusupova — *fizika-matematika fanlari nomzodi, O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Matematika va informatsion texnologiyalari institutining katta ilmiy xodimi;*

Z. Ortiqboyeva — *pedagogika fanlari nomzodi, Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat pedagogika universitetining dotsenti.*

Mazkur darslik davlat ta'lim standarti va dasturining takomillashtirilgan variantiga mos holda yozildi. Sinfda ishlash uchun tavsiya etilgan masalalar nisbatan murakkab masala bilan tugaydi, qiyinroq deb hisoblangan masalalar alohida ajratib ko'rsatilgan bo'lib, ular o'quvchilarning qobiliyatini oshirishga xizmat qiladi. Undan keyingi masalalar uy vasifasi uchun mo'ljallangan.

Har paragraf oxirida mos qo'shimcha masalalar berilgan. O'quvchilarning bilimlarini sinash uchun minimal miqdorda mavzuiy testlar mavjud bo'lib, ularda o'quvchilarning bilimini sinash nazarda tutilgan. Testlar DTS ga mos holda tuzilgan. Kurs oxiridagi takrorlash mashqlaridan dars jarayonida ham foydalanish mumkin. Qayta ishlash jarayonida ekspert xulosalari nazarga olindi va yangi masalalar bilan to'ldirildi.

SHARTLI BELGILAR:

7. — qiyinroq masalalar

— yodda saqlang

— tarixiy ma'lumotlar

1- TEST — o'zingizni sinab ko'ring

«Respublika maqsadli kitob jamg'armasi mablag'lari hisobidan ijara uchun chop etildi.»

ISBN 978-9943-361-33-1

1- §. TO‘RTBURCHAKLAR

1- mavzu. KO‘PBURCHAKLAR

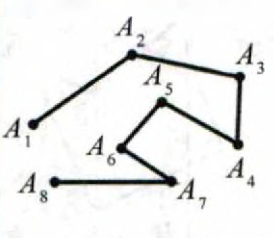
1. Ko‘pburchaklar. Ko‘pburchak tushunchasi bilan Siz 7- sinfda tanishgansiz. Avval siniq chiziqqa ta’rif berilib, so‘ngra sodda siniq chiziq tushunchasi kiritilgan. Agar siniq chiziq o‘z-o‘zi bilan kesishmasa, bunday siniq chiziq *sodda siniq chiziq* deyiladi. 1- rasmda sodda siniq chiziq, 2- rasmda esa o‘z-o‘zi bilan keshishadigan (B nuqtada) siniq chiziq ko‘rsatilgan.

So‘ngra yopiq siniq chiziq tushunchasi bilan tanishgansiz. Siniq chiziqning boshi va oxirgi uchi ustma-ust tushsa, siniq chiziq *yopiq siniq chiziq* deb ataladi (3- rasm). Sodda yopiq siniq chiziq tekislikni shu siniq chiziqqa tegishli bo‘lmagan ikki sohaga — ichki va tashqi sohaga ajratadi, u shu sohaning umumiy chegarasidir. 4- rasmda ichki soha bo‘yab ko‘rsatilgan.

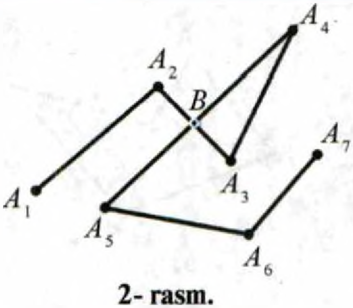
1- ta’rif. *Tekislikning sodda yopiq siniq chiziq bilan uning ichki sohasining birlashmasi* ***yassi ko‘pburchak*** *deb ataladi.*

Ko‘pburchakning chegarasiga tegishli bo‘lmagan nuqtalari shu ko‘pburchakning *ichki nuqtalari*, chegaraning nuqtalari — *chegaraviy* nuqtalar deyiladi. Siniq chiziqning uchlari *ko‘pburchakning uchlari*, uning bo‘g‘inlari ko‘pburchakning *tomonlari* deb ataladi.

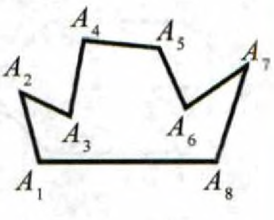
Ko‘pburchakning hamma tomonlari uzunliklarining yig‘indisi ko‘pburchakning *perimetri* deyiladi.



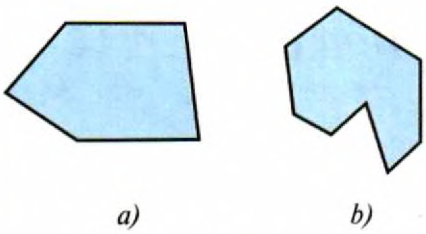
1- rasm.



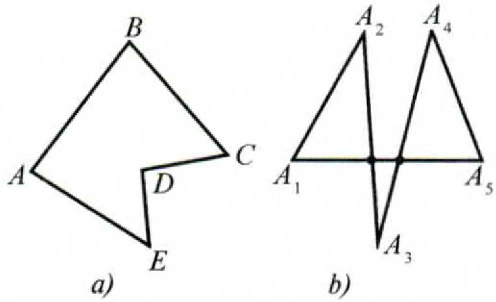
2- rasm.



3- rasm.



4- rasm.



5- rasm.

Ko‘pburchakning tomonlari (uchlari) soni o‘zining burchaklari soniga teng. Shunga qarab, ular uchburchak, to‘rtburchak va hokazolarga bo‘linadi.

5-*a* rasmda *ABCDE* beshburchak tasvirlangan. 5-*b* rasmdagi tasvirlangan shakl esa ko‘pburchak emas, chunki qo‘shni bo‘lmagan A_1A_5 va A_2A_3 (shuningdek, A_3A_4 va A_1A_5) tomonlari umumiy nuqtaga ega.

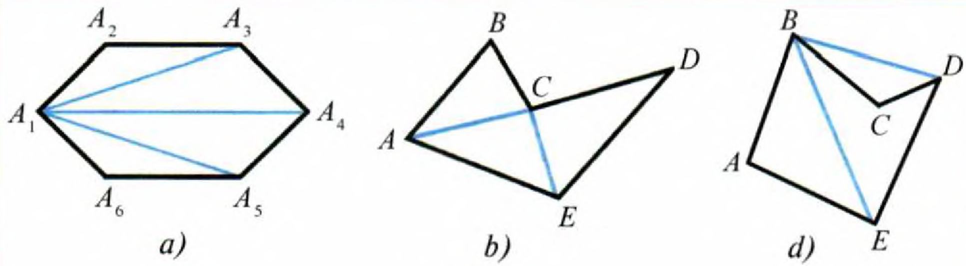
Ko‘pburchakning bir tomoniga tegishli ikki uchi *qo‘shni uchlar* deyiladi. Ko‘pburchakning qo‘shni bo‘lmagan ixtiyoriy ikki uchini birlashtiruvchi kesma uning *diagonali* deyiladi.

Masalan, 6-*a* rasmda A_1A_3, A_1A_4 va A_1A_5 oltiburchakning A_1 uchidan, 6-*b* rasmdagi *AC* va *CE* hamda 6- *d* rasmdagi *BE* va *BD* kesmalar esa mos ravishda beshburchakning *C* va *B* uchidan chiqqan diagonallaridir.

Ko‘pburchakni belgilashda uning uchlari ketma-ket kelish tartibida ifodalanadi. Masalan, 5- *a* rasmdagi beshburchak *ABCDE*, yoki *BCDEA*, yoki *CDEAB* va hokazo kabi belgilanadi.

2. Qavariq ko‘pburchaklar.

2- ta’rif. *Agar ko‘pburchak tomonini o‘z ichiga olgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa nisbatan bitta yarim tekislikda yotsa, u* ***qavariq ko‘pburchak*** *deyiladi. Bunda to‘g‘ri chiziqning o‘zi shu yarim tekislikka tegishli hisoblanadi.*



6- rasm.

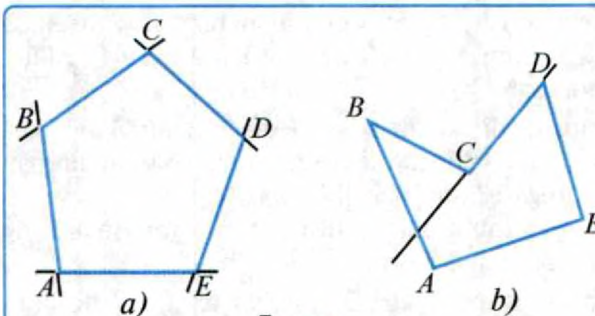
Masalan, 7- *a* rasmda qavariq ko‘pburchak, 7- *b* rasmda esa noqavariq ko‘pburchak tasvirlangan.

3. Ko‘pburchakning diagonallari soni haqida.

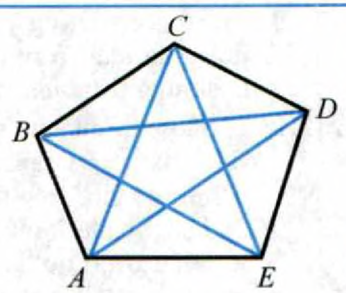
Teorema.

Qavariq n burchakning diagonallari soni $\frac{n(n-3)}{2}$ ga teng.

Isbot. Ko‘pburchakning ixtiyoriy uchini olsak, u bilan bir tomonga tegishli bo‘lgan ikkita uch mavjud. Bir tomonga tegishli bo‘lmagan uchlar soni esa $(n-3)$ ta. Shuning uchun ko‘pburchakning har bir uchidan chiqqan diagonallari soni $(n-3)$ ga teng. Hamma uchidan chiqqan diagonallar soni esa $n(n-3)$ ta ga teng. Bunda har bir diagonal ko‘pburchakning ikki uchini tutashtirgani sababli, ikki martadan hisobga olingan. Demak, ko‘pburchakning jami turli diagonallari soni undan ikki marta kam bo‘ladi, ya’ni $\frac{n(n-3)}{2}$ ga teng. Masalan, $ABCDE$ beshburchakning $(n=5)$ A uchidan chiqqan diagonallari soni $5-3=2$ (AC va AD) ta, jami diagonallari soni esa $\frac{5\cdot(5-3)}{2}=5$ ta (AC, AD, BD, BE va CE) bo‘ladi (8- rasm).



7- rasm.



8- rasm.

Savol, masala va topshiriqlar

1. 1) Siniq chiziq deb nimaga aytiladi? Sodda siniq chiziq nima?
2) Ko‘pburchak deb nimaga aytiladi?
3) Ko‘pburchakning diagonali deganda nimani tushunasiz?
4) Qavariq ko‘pburchakning ta’rifini ayting.

2. Qavariq n burchakning: 1) bir uchidan nechta diagonal o‘tkazish mumkin? 2) diagonallari soni qanday formula bo‘yicha hisoblanadi? To‘rtburchakning nechta diagonali bor?

3. 1) Ko'pburchak uchlarining soni n bilan tomonlarining soni p orasida qanday bog'lanish bor?
2) Har qanday siniq chiziq tekislikni ikki qismga ajratadi, deyish to'g'rimi? Javobingizni izohlang.
4. 1) Qavariq ko'pburchak chizing; 2) qavariq bo'lmagan ko'pburchak chizing. Qavariq ko'pburchak qavariq bo'lmagan ko'pburchakdan nimasi bilan farq qilishini tushuntiring.
5. 1) Qavariq ko'pburchak uchlarining soni kamida nechta bo'lishi mumkin? 2) Qavariq bo'lmagan ko'pburchakda-chi?
6. Qavariq n burchakni boshi ko'pburchakning uchlaridan birida bo'lgan nurlar bilan kamida nechta uchburchakka ajratish mumkin ($n > 3$)?
7. 1) Qavariq ko'pburchakning bir uchidan chiqqan diagonallari soni 15 ta. Shu ko'pburchakning jami diagonallari sonini toping.
2) Qavariq: a) o'nbirburchakning; b) o'ttizburchakning bir uchidan chiqqan hamda jami diagonallari soni nechta?
3) Qavariq ko'pburchakning diagonallari soni uning tomonlari sonidan 2,5 marta ko'p. Shu ko'pburchakning tomonlari nechta?
8. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 96 sm ga teng. Agar to'g'ri to'rtburchakning tomonlari 1 : 3 nisbatda bo'lsa, uning tomonlarini toping.
9. To'rtburchakning perimetri 16 sm, tomonlaridan biri mos ravishda qolganlaridan 6 mm ga, 8 mm ga va 10 mm ga katta. Shu to'rtburchakning tomonlarini toping.
10. 1) Ko'pburchakning birorta diagonali boshqa diagonallari bilan kesishmasa, u qavariq emas. Bu fikrni to'rtburchak, beshburchak uchun chizib, to'g'ri ekaniga ishonch hosil qiling.
2) Diagonallarining soni: a) tomonlari soniga teng; b) tomonlarining sonidan ortiq bo'lgan ko'pburchak bormi?
11. Agar $ABCD$ to'rtburchakning perimetri 22 sm ga teng, AB tomoni BC tomondan 2 sm ga katta va DA hamda CD tomonlarining har biridan 2 sm ga kichik bo'lsa, uning BC tomonini toping.
12. Qavariq ko'pburchakning bir uchidan chiqqan diagonallari soni 18 ta. Shu ko'pburchakning tomonlari soni nechta? Jami diagonallari soni-chi?
13. Qavariq oltiburchakning: 1) bir uchidan chiqqan diagonallar sonini; 2) jami diagonallari sonini toping.
14. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 66 sm ga, eni esa 15 sm ga teng. Shu to'g'ri to'rtburchakning bo'yini toping.

2- mavzu.

QAVARIQ KO'PBURCHAK ICHKI VA TASHQI BURCHAKLARINING YIG'INDISI

Qavariq beshburchak chizing va uning biror uchidan chiquvchi barcha diagonallarini o'tkazing.

1) Bunda nechta uchburchak hosil bo'ladi?

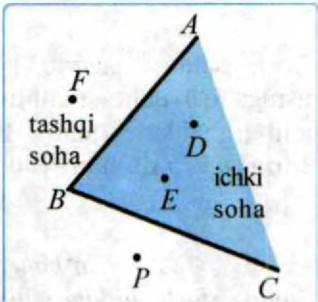
2) Shu beshburchakning burchaklari yig'indisini toping.

Javob: 1) ... ta; 2) ...°.

1. Dastlabki tushunchalar.

Yoyiq burchakdan farqli bo'lgan burchak tekislikni ikki sohaga ajratadiki, bu sohalardan biri qavariq bo'lib, ikkinchisi qavariq bo'lmaydi.

Agar yoyiq bo'lmagan burchakning ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesmaning hamma nuqtasi shu burchakka tegishli bo'lsa, u *qavariq burchak* deyiladi. Odatda, bu qavariq burchak burchakning *ichki sohasi*, ikkinchisi esa *tashqi soha* deb ataladi (9- rasm).



D va *E* – ichki nuqtalar, *F* va *P* – tashqi nuqtalar

9- rasm.

Burchakning ichki sohasiga tegishli nuqtalar *ichki nuqtalar*, tashqi sohaga qarashli nuqtalar *tashqi nuqtalar* deb ataladi.

Agar burchakning ichki sohasi *qavariq* bo'lsa, u holda burchak *yoyiq burchakdan kichik* deyiladi.

Agar burchakning ichki sohasi *qavariq bo'lmasa*, u holda burchak *yoyiq burchakdan katta* deyiladi.

Ta'rif. ***Ko'pburchakning*** *berilgan uchidagi* ***ichki burchagi*** *deb, uning shu uchida uchrashuvchi tomonlari hosil qilgan burchakka aytiladi.*

2. Ko'pburchak ichki burchaklarining yig'indisi.

1-teorema.

Qavariq n burchak ichki burchaklarining yig'indisi $180°(n-2)$ ga teng, bunda n — tomonlar soni.

Isbot. $A_1A_2A_3...A_n$ — berilgan qavariq n burchak va $n > 3$ bo'lsin (6-*a* rasmga q.). Biror uchidan, masalan A_1 dan, ko'pburchakning barcha diagonallarini o'tkazamiz. Bu diagonallar uni $(n-2)$ ta uchburchakka ajratadi.

Haqiqatan ham, *ikki chetki uchburchaklar* ($\Delta A_1A_2A_3$ va $\Delta A_1A_{n-1}A_n$) ko'pburchakning ikki tomoni va bir diagonali, qolgan uchburchaklar esa ko'pburchakning bir tomoni va ikki diagonalidan tuzilgan. Shuning uchun uchburchaklar soni ($n-2$) ta, ya'ni ko'pburchakning tomonlari sonidan ikkitaga kam bo'ladi. Ko'pburchakning burchaklari yig'indisi uni tashkil qiluvchi uchburchak burchaklari yig'indisiga, ya'ni $180°(n-2)$ ga teng bo'ladi.

1. *Qavariq ko'pburchakning ichki burchaklari yig'indisi 180° ga karrali bo'ladi.*
2. *Qavariq ko'pburchakning har bir burchagi 180° dan kichikdir.*
3. *Ko'pburchak burchaklari yig'indisi to'g'risidagi teorema qavariq bo'lmagan ko'pburchaklar uchun ham o'rinli.*

Masalan, qavariq bo'lmagan beshburchak burchaklari yig'indisi (6- *b* rasmga q.) uchta uchburchakning (chunki AC va CE diagonallar uni uchta uchburchakka ajratadi) hamma burchaklari yig'indisiga, ya'ni 540° ga teng. Biroq, $n = 5$ da ham $180° \cdot (5-2) = 180° \cdot 3 = 540°$.

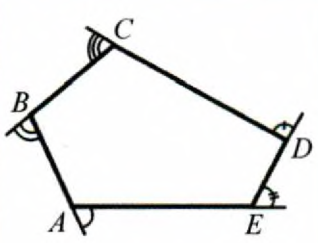
3. Ko'pburchak tashqi burchaklarining yig'indisi.

T a ' r i f. ***Ko'pburchakning berilgan uchidagi tashqi burchagi*** *deb, uning shu uchidagi ichki burchagiga qo'shni burchakka aytiladi.*

2- t e o r e m a .

Qavariq n burchakning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi 360° ga teng.

I s b o t . Ko'pburchakning har qaysi uchida bittadan tashqi burchak yasaymiz. Ko'pburchak ichki burchagi va u bilan qo'shni bo'lgan tashqi burchagining yig'indisi 180° ga teng (10- rasm). Shu sababli barcha ichki va har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi $180°n$ ga teng. Ammo ko'pburchakning hamma ichki burchaklarining yig'indisi $180°(n-2)$ ga teng. U holda har qaysi uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarning yig'indisi $180°n - 180°(n-2) = 180°n - 180°n + 360° =$ $= 360°$ ga teng bo'ladi.



10- rasm.

M a s a l a . Ko'pburchakning ichki burchaklarining va bitta tashqi birchagining yig'indisi 2115° ga teng. Shu ko'pburchakning nechta tomoni bor?

Yechish. Qavariq ko'pburchakning ichki burchaklari yig'indisi 180° ga karrali, shuning uchun 2115° ni quyidagicha yozib olamiz:

$$2115° = 11 \cdot 180° + 125°.$$

Demak, ushbu qavariq ko'pburchakning ichki burchaklari yig'indisi $11 \cdot 180° = 1980°$ ga teng, 125° esa biror ichki burchagiga mos tashqi burchakdir. $180°(n-2) = 11 \cdot 180°$ tenglamani yechib, topamiz:

$$n - 2 = 11, \text{ ya'ni } n = 13.$$

Javob: 13 ta.

Savol, masala va topshiriqlar

15. 1) Ko'pburchakning berilgan uchidagi ichki burchagi nima? Tashqi burchagi-chi?

2) Qavariq n burchakning ichki burchaklari yig'indisi nimaga teng? Har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklarining yig'indisi-chi?

16. Qavariq to'rtburchakning burchaklari 1, 2, 3 va 4 sonlariga proporsional. Shu burchaklarni toping.

17. 1) O'nikkiburchakning; 2) o'ttizburchakning; 3) ellikburchakning; 4) to'qsonburchakning burchaklari yig'indisini toping.

Namuna. 1) $\alpha_{13} = 180° \cdot (13 - 2) = ...° \cdot ... = ...°$.

18. Ko'pburchak burchaklarining yig'indisi: 1) 1080° ga; 2) 1620° ga; 3) 3960° ga teng. Ko'pburchakning nechta tomoni bor?

19. Har bir ichki burchagi: 1) 144° ga; 2) 150° ga; 3) 170° ga; 4) 171° ga teng bo'lgan qavariq ko'pburchakning nechta tomoni bor?

20. Tashqi burchagining har biri: 1) 36° ga; 2) 24° ga; 3) 60° ga; 4) 15° ga teng bo'lgan qavariq ko'pburchakning nechta tomoni bor?

21. Ichki burchaklar yig'indisi uning har bir uchidan bittadan olingan tashqi burchaklari yig'indisidan 6 marta katta bo'lgan ko'pburchakning tomoni nechta?

22. Qanday qavariq n burchakda uning hamma burchaklari: 1) o'tmas; 2) to'g'ri; 3) o'tkir bo'lishi mumkin?

23. Ko'pburchak ichki burchaklarining va bitta tashqi burchagining yig'indisi 1000° ga teng. Shu ko'pburchakning tomonlari soni nechta?

24. 1) O'nuchburchakning; 2) o'nburchakning; 3) yigirmaburchakning; 4) qirqburchakning burchaklari yig'indisini toping.

25. Tashqi burchagining har biri: 1) 10° ga; 2) 12° ga; 3) 30° ga; 4) 45° ga teng bo'lgan qavariq ko'pburchakning nechta tomoni bor?

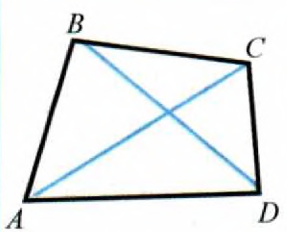
3- mavzu. TRAPETSIYA

1. To‘rtburchaklar. To‘rtta nuqta va bu nuqtalarni ketma-ket tutashtiruvchi to‘rtta kesmadan iborat shakl ***to‘rtburchak*** deyiladi. Bunda nuqtalardan hech qanday uchtasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmasligi, ularni tutashtiruvchi kesmalar esa kesishmasligi kerak. Berilgan nuqtalar to‘rtburchakning *uchlari*, ularni tutashtiruvchi kesmalar esa *tomonlari* deyiladi. To‘rtburchakning umumiy uchga ega bo‘lgan tomonlari *qo‘shni tomonlari* deb, umumiy uchga ega bo‘lmagan tomonlari esa *qarama-qarshi tomonlari* deb ataladi. Bir tomonga tegishli bo‘lgan uchlari *qo‘shni uchlar* deb, qolgani esa *qarama-qarshi uchlar* deb ataladi. Qarama-qarshi uchlarni tutashtiruvchi kesmalar to‘rtburchakning *diagonallari* deyiladi.

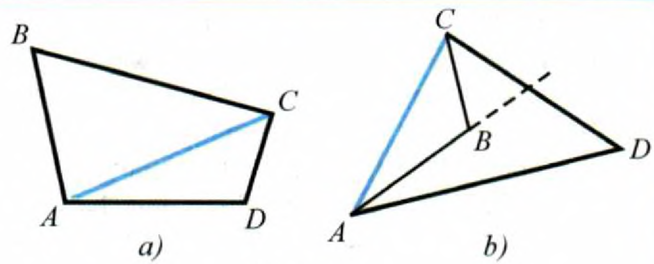
To‘rtburchakni belgilashda yonma-yon turgan uchlar ketma-ket kelish tartibida aytib chiqiladi. Masalan, 11- rasmda tasvirlangan to‘rtburchak bunday belgilanishi mimkin: $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$ va hokazo. Ammo $ABDC$ deb belgilash mumkin emas (B va D – qo‘shni bo‘lmagan uchlar).

Masalan, 11- rasmda AB va AD – qo‘shni tomonlar, AB va CD – qarama-qarshi tomonlar; A ga B va D uchlar – qo‘shni uchlar, C esa qarama-qarshi uch bo‘ladi; AC va BD kesmalar diagonallardir.

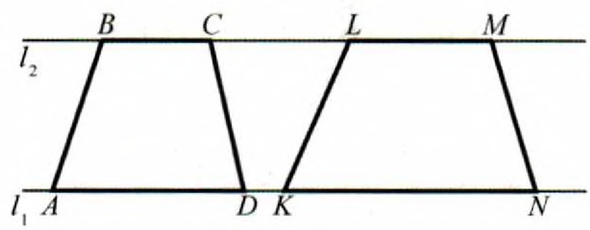
Ma’lumki, biz asosan qavariq ko‘pburchaklarni o‘rganamiz. Shuning uchun bundan buyon to‘rtburchak deganda, asosan qavariq to‘rtburchaklarni tushunamiz.



11- rasm.



12- rasm.



13- rasm.

12- *a* rasmda qavariq to'rtburchak, 12- *b* rasmda esa botiq (noqavariq) to'rtburchak tasvirlangan. Botiq to'rtburchaklarda diagonallardan biri, ya'ni AC to'rtburchak ichki qismiga tegishli emasligiga ahamiyat bering.

2. Trapetsiya. To'rtburchaklarning burchaklari yoki qarama-qarshi tomonlarining o'zaro joylanishiga qarab, ular turli sinflarga ajtratiladi. Shu sinflardan eng soddasi — trapetsiya bilan tanishamiz.

To'rtburchakda ikki juft qarama-qarshi tomonlar bor. Shunday to'rtburchaklar mavjudki, ularda bir juft qarama-qarshi tomonlari parallel to'g'ri chiziqlarda yotishi mumkin. Masalan, l_1, l_2 parallel to'g'ri chiziqlarning har biridan ikkitadan nuqta olib, ularni o'zaro tutashtirsak (13- rasm), $ABCD$ yoki $KLMN$ to'rtburchaklarning bir juft qarama-qarshi tomonlari parallel bo'ladi.

Ta'rif. *Ikkita tomoni parallel, qolgan ikki tomoni parallel bo'lmagan to'rtburchak **trapetsiya** deb ataladi.*

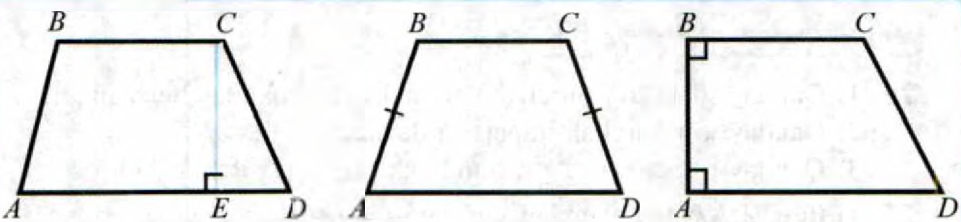
Trapetsiyaning parallel tomonlari uning *asoslari*, parallel bo'lmagan tomonlari esa *yon tomonlari* deb ataladi. Trapetsiyaning asoslari yotgan to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa *trapetsiyaning balandligi* deyiladi (14- rasm). Trapetsiya asoslariga perpendikular bo'lgan har qanday kesma, uning balandligi sifatida olinishi mumkin, chunki parallel to'g'ri chiziqlar nuqtalari orasidagi masofalar o'zaro teng.

Yon tomonlari uzunligi teng trapetsiya *teng yonli trapetsiya* deyiladi (15- rasm). Burchaklaridan biri to'g'ri bo'lgan trapetsiya *to'g'ri burchakli trapetsiya* deyiladi (16- rasm).

Endi to'rtburchakning trapetsiya bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartni topamiz.

Teorema.

Agar to'rtburchak biror qo'shni ikki burchagining yig'indisi 180° bo'lsa, bunday to'rtburchak *trapetsiya* bo'ladi.



AD va BC — asoslar, $AD \parallel BC$, AB va DC — yon tomonlar, $CE \perp AD$, CE — balandlik

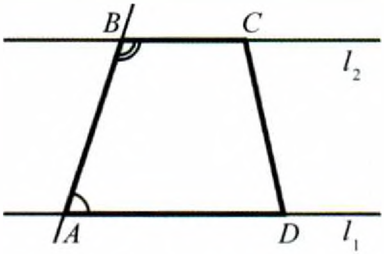
14- rasm.

$AB = DC$, teng yonli trapetsiya

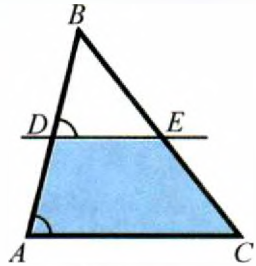
15- rasm.

$\angle A = 90°$, to'g'ri burchakli trapetsiya

16- rasm.



17- rasm.



18- rasm.

Isbot. $ABCD$ to'rtburchakda $\angle A+\angle B=180°$ berilgan bo'lsin (17- rasm). $ABCD$ to'rtburchak trapetsiya ekanini isbotlaymiz, ya'ni: birinchidan, bir juft qarama-qarshi tomonlar parallel hamda, ikkinchidan, uning qolgan ikki tomoni parallel emasligini ko'rsatishimiz kerak.

Buning uchun AB, BC va AD to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Shartda $\angle A+\angle B=180°$ berilgani uchun, parallellikning birinchi alomatiga ko'ra AD va BC kesmalar parallel bo'ladi. Demak, birinchi shart bajarildi. Endi A va D (yoki B va C) burchaklarning yig'indisi 180° ga teng emasligiga ishonch hosil qilishimiz kerak. Bu holda AB va DC kesmalar parallel bo'lmaydi, aks holda esa AB va DC kesmalar parallel bo'ladi (Yevklidning parallel to'g'ri chiziqlar to'g'risidagi aksiomasiga ko'ra). Demak, $ABCD$ trapetsiya ekan.

Bu teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija. *Trapetsiyaning bir burchagi 90° bo'lsa, uning yana bitta 90° li burchagi mavjud.*

Demak, to'g'ri burchakli trapetsiyaning bitta yon tomoni ikkala asosga perpendikular bo'lib, uning balandligiga teng bo'ladi.

Trapetsiyani har qanday uchburchakdan uning bir tomoniga parallel to'g'ri chiziq bilan kesish yordamida hosil qilish mumkin (18- rasm).

Savol, masala va topshiriqlar

26. 1) Qanday shakl to'rtburchak deb ataladi? U qanday belgilanadi?

2) Qanday to'rtburchak trapetsiya deyiladi?

3) Qanday trapetsiya to'g'ri burchakli trapetsiya deb ataladi?

27. 1) Biror $MNPQ$ to'rtburchak chizing va uning elementlarini yozing.

2) Trapetsiya uchidan o'tmagan balandligi uni ikkita to'g'ri burchakli trapetsiyaga ajratadi. Shuni chizib ko'rsating.

28. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga parallel to'g'ri chiziq kesmasi uni qanday shakllarga ajratadi?

29. Trapetsiyaning diagonali yon tomoniga perpendikular, shu diagonal qarshisidagi o'tkir burchak $50°$ ga teng. Trapetsiyaning kichik asosi ikkinchi yon tomoniga teng. Trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

30. Trapetsiyaning asosidagi burchaklari $110°$ va $99°$ ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

31. 1) $ABCD$ trapetsiyaning kichik asosi $BC = 4$ sm. B uchidan yon tomoniga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning perimetri 12 sm ga teng. Trapetsiyaning perimetrini toping.

2) $ABCD$ to'g'ri burchakli trapetsiyaning ($AD \parallel BC$ va $BA \perp AD$) kichik diagonali katta yon tomoniga teng. Trapetsiyaning kichik diagonali va kichik asosi orasidagi burchak $50°$ ga teng. Trapetsiyaning o'tkir burchagini toping.

32. Trapetsiyada: 1) uchta to'g'ri burchak bo'lishi mumkin emasligini; 2) uchta burchak yig'indisi $180°$ ga teng bo'la olmasligini isbot qiling.

33. AD va BC asosli $ABCD$ trapetsiyaning A va C burchaklarini toping, bunda $\angle B = 105°$ va $\angle D = 39°$. Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.

Yechish. A va B, C va D burchaklar AB va BC parallel to'g'ri chiziqlarni ... va ... kesuvchilar bilan kesishishidan hosil bo'lgan ..., shuning uchun $\angle A + \angle B = ...°$ va $\angle C + \angle D = ...°$. Shartga ko'ra $\angle B = 105°$ va $\angle D = 39°$, u holda $\angle A = ...° - \angle B = ...° - ...° = ...°$ va $\angle C = ...° - \angle D = ...° - ...° = ...°$.

Javob: $\angle A = ...°$, $\angle C = ...°$.

34. Trapetsiyaning asoslari 12 sm va 20 sm, yon tomonlari esa 4 sm va 11 sm. Kichik asosining uchidan kichik tomoniga parallel to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Shu parallel to'g'ri chiziq ajratgan uchburchakning perimetrini toping.

35. Trapetsiyaning asosidagi burchaklari $72°$ va $86°$ ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

36. $ABCD$ trapetsiyaning kichik asosi 6 sm ga, ABE uchburchakning ($BE \parallel CD$) perimetri 36 sm ga teng. Trapetsiyaning perimetrini toping.

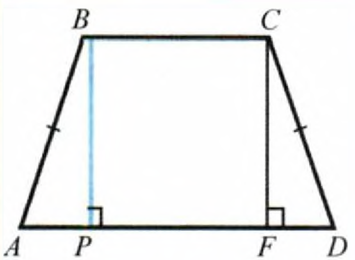
4- mavzu. TENG YONLI TRAPETSIYANING XOSSASI

$ABCD$ teng yonli trapetsiyani qaraylik. Bunda $AD = a$ – katta asosi, $BC = b$ – kichik asosi bo'lsin. Kichik asosining B uchidan BP balandlik o'tkazaylik (19- rasm). Balandlikning P asosi AD asosni AP va PD kesmalarga ajratsin.

Teorema.

Teng yonli trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan o'tkazilgan balandlik katta asosini uzunliklari asoslari ayirmasining yarmiga va asoslari yig'indisining yarmiga teng bo'laklarga ajratadi, ya'ni:

$$AP = \frac{a-b}{2}, \quad PD = \frac{a+b}{2}.$$



19- rasm.

Isbot. C uchidan $CF \perp AD$ ni o'tkazamiz. To'g'ri burchakli ABP va DCF uchburchaklar teng: $AB = DC$ – shartga ko'ra, $BP = CF$ esa BC va AD parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa bo'lgani uchun. Uchburchaklar tengligidan, $AP = FD$ kelib chiqadi.

To'g'ri chiziqqa perpendikular ikki to'g'ri chiziq o'zaro parallel bo'ladi. Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa teng bo'lgani uchun $BC = PF = b$.

Demak, $AP = FD = \frac{AD - PF}{2} = \frac{a-b}{2}$, $PD = AD - AP = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.

Shunday qilib, $AP = \frac{a-b}{2}$ va $PD = \frac{a+b}{2}$ ekan.

Savol, masala va topshiriqlar

37. 1) Qanday trapetsiya teng yonli trapetsiya deb ataladi?

2) Teng yonli trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan o'tkazilgan balandlik qanday xossaga ega?

38. Teng yonli trapetsiyada: 1) diagonallari teng; 2) asosidagi burchaklari teng ekanligini isbot qiling.

39. Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 60° ga, yon tomoni 24 sm ga, asoslarining yig'indisi esa 43 sm ga teng. Trapetsiyaning asoslarini toping.

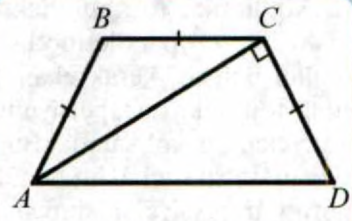
40. Teng yonli trapetsiyaning o'tkir burchagi 60°, asoslari 15 sm va 49 sm ekani ma'lum. Shu trapetsiyaning perimetrini toping.

41. Teng yonli trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan o'tkazilgan balandlik katta asosini 6 sm va 30 sm li kesmalarga bo'ladi. Shu trapetsiyaning asoslarini toping.

42. Teng yonli uchburchakni asosiga parallel to'g'ri chiziq bilan kesganda, teng yonli trapetsiya hosil bo'lishini isbotlang.

43. Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 105° ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

44. Teng yonli trapetsiyaning kichik asosi yon tomoniga teng, diagonali yon tomoniga perpendikular (20- rasm). Uning burchaklarini toping.



20- rasm.

45. Teng yonli trapetsiyaning qarama-qarshi burchaklari ayirmasi 50° ga teng. Uning burchaklarini toping.

46. Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 72° ga teng. Shu trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

47. Teng yonli trapetsiyaning katta tomoni 5,4 dm ga, yon tomoni 2 dm ga va ular orasidagi burchak 60° ga teng. Uning kichik asosini toping.

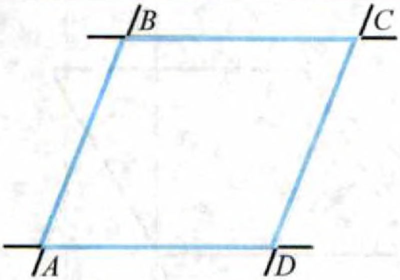
5- mavzu. PARALLELOGRAMM VA UNING XOSSALARI

1. Parallelogramm.

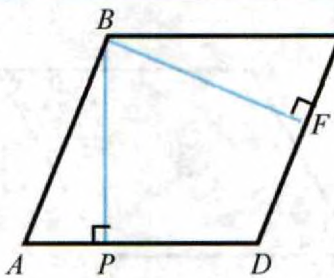
Ta'rif. *Qarama-qarshi tomonlari o'zaro parallel bo'lgan to'rtburchak* ***parallelogramm*** *deb ataladi.*

Agar $ABCD$ parallelogramm bo'lsa, $AB \parallel DC$ va $AD \parallel BC$ bo'ladi (21- rasm).

Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlariga perpendikular bo'lgan kesmalar parallelogrammning *balandliklari* deyiladi. Parallelogrammning, umuman aytganda, bir-biridan farq qiladigan ikkita balandligi bo'ladi. Masalan, 22- rasmda BP va BF balandliklardir.



21- rasm.



22- rasm.

Ma'lumki, to'rtburchak trapetsiya bo'lishi uchun uning bir juft qarama-qarshi tomoni parallel bo'lishi kerak edi. Parallelogrammda ikkinchi juft ham parallel bo'lishi kerak ekan. Bu, to'rtburchak parallelogramm bo'lishi uchun uning tomonlari, trapetsiyaning tomonlaridan ko'proq shartni qanoatlantirishi zarur ekanini ko'rsatadi. Bundan parallelogramm trapetsiyalar sinfiga tegishli bo'lgan to'rtburchaklar ichidan olinganligi kelib chiqadi. Demak, parallelogramm trapetsiyalar sinfiga kiradi, u esa o'z navbatida to'rtburchaklar sinfining vakilidir. Bundan parallelogramm trapetsiya xossalariga ega ekani kelib chiqadi.

2. Parallelogrammning xossalari.

1-teorema.

Parallelogrammning diagonali uni ikkita teng uchburchakka bo'ladi.

Isbot. $ABCD$ parallelogramm berilgan bo'lsin, unda $AB \parallel CD$ va $BC \parallel AD$. Uning AC diagonalini o'tkazamiz (23- rasm). Bunda $ABCD$ parallelogramm ADC va CBA uchburchaklarga ajraladi. $\Delta ADC = \Delta CBA$ ekanini isbotlaymiz.

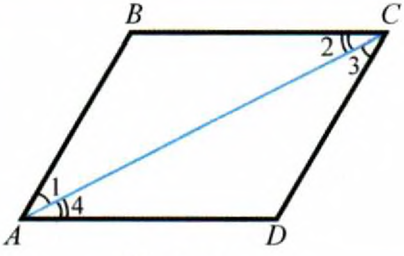
Bu uchburchaklarda AC — umumiy tomon va unga yopishgan mos burchaklar teng, ya'ni $\angle 1 = \angle 3$ (AB va DC parallel to'g'ri chiziqlar hamda AC kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun) va $\angle 2 = \angle 4$ (AD va BC parallel to'g'ri chiziqlar hamda AC kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun). Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra: $\Delta ADC = \Delta CBA$.

Bu teoremadan ushbu natijalar kelib chiqadi:

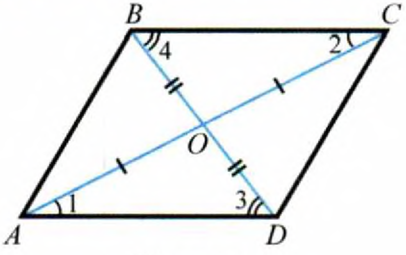
1-natija. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng.

2-natija. Parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari teng.

Natijalarning to'g'ri ekanini isbotlashni o'zingizga havola qilamiz.



23- rasm.



24- rasm.

2-teorema.

Parallelogrammning diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

Isbot. $ABCD$ — berilgan parallelogramm va O — AC va BD diagonallarining kesishish nuqtasi bo'lsin (24- rasm). $AO = OC$ va $DO = OB$ ekanini isbot qilamiz.

Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra: $\Delta AOD = \Delta COB$. Chunki bu uchburchaklarda $AD = BC$ (parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari bo'lgani uchun), $\angle 1 = \angle 2$ va $\angle 3 = \angle 4$ (AD va BC parallel to'g'ri chiziqlarni mos ravishda AC va BD kesuvchilar kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun). Shuning uchun, $AO = OC$ va $DO = OB$.

Savol, masala va topshiriqlar

48. 1) Qanday to'rtburchakka parallelogramm deyiladi?
2) Parallelogramm qavariq to'rtburchak bo'ladimi?

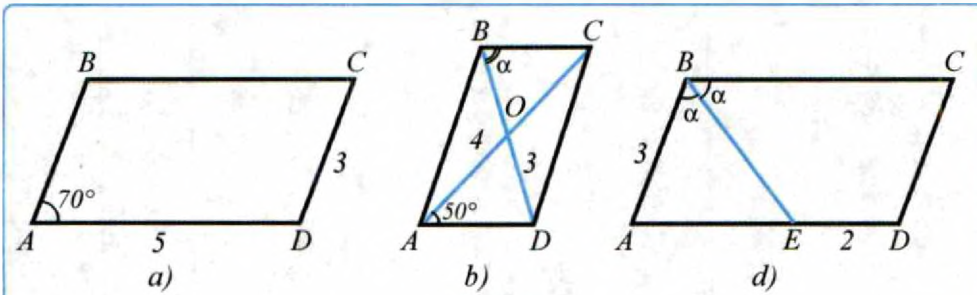
49. Parallelogrammning: 1) hamma burchaklari o'tkir bo'lishi mumkinmi? 2) burchaklaridan faqat bittasi to'g'ri bo'lishi mumkinmi?

50. Parallelogrammning qo'shni burchaklari yig'indisi 180° ga teng ekanini isbotlang.

51. 25- rasmda parallelogrammning ayrim elementlarining kattaligi ko'rsatilgan. Yana qaysi kattaliklarni topish mumkin?

52. Agar parallelogrammning burchaklaridan biri: 1) 25°; 2) 100°; 3) boshqasidan 2 marta katta; 4) boshqasidan 90° ortiq bo'lsa, parallelogrammning hamma burchaklarini toping.

53. Parallelogrammning qo'shni tomonlari yig'indisi 20 sm ga, ayirmasi esa 12 sm ga teng. Shu parallelogrammning tomonlarini toping.

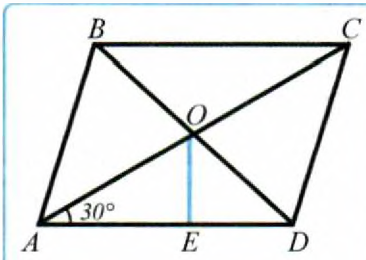


25- rasm.

54. Parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Shu to‘g‘ri chiziqning parallelogrammning parallel tomonlari orasidagi kesmasi bu nuqtada teng ikkiga bo‘linishini isbotlang.

55. O‘tkir burchagi A bo‘lgan $ABCD$ parallelogrammning B uchidan AD tomonga BK perpendikular o‘tkazilgan, $BK = 0{,}5AB$. C va D burchaklarni toping.

56. $ABCD$ parallelogrammda AC diagonal 24 sm ga teng bo‘lib, AD tomon bilan 30° li burchak hosil qiladi, O nuqta AC va BD diagonallarning kesishish nuqtasi (26- rasm). $OE \perp AD$. OE kesmaning uzunligini toping. Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.



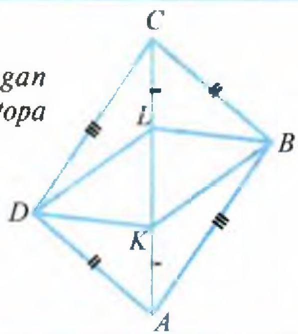
26- rasm.

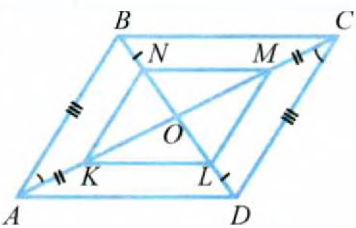
Yechish. Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida ..., shuning uchun $AO = ... = ...$ sm. $\triangle AOE$ — gipotenuzasi ... va A o‘tkir burchagi ...° teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchak. Shuning uchun ...° li burchak qarshisida yotgan OE katet ... ga teng, ya’ni $OE = ... = ... \cdot ... = ...$ (sm).
Javob: ... = ... sm.

57. Parallelogrammning diagonali uning ikki tomoni bilan 35° va 55° li burchaklar tashkil qiladi. Shu parallelogrammning hamma burchaklarini toping.

6- mavzu. PARALLELOGRAMMNING ALOMATLARI

Rasmlarda tasvirlangan parallelogrammlarni topa olasizmi?





Avvalgi mavzuda ko'rib chiqqanimizdan ma'lum bo'ldiki, parallelogrammning qarama-qarshi burchaklari va tomonlari teng. Shuningdek, parallelogramm trapetsiya xossalariga ega bo'lgani uchun uning ikki qo'shni burchagi yig'indisi $180°$ bo'ladi. Trapetsiyadan farqli, parallelogrammda ixtiyoriy ikki qo'shni burchak yig'indisi $180°$ bo'ladi.

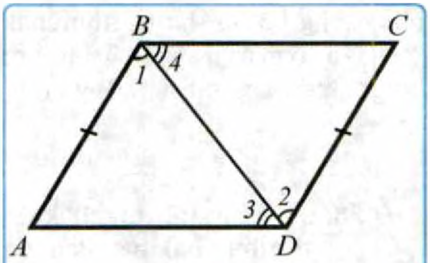
Parallelogrammning diagonali uni ikkita teng uchburchakka ajratishini isbotladik. Bunda parallelogramm burchaklari yig'indisi uni tashkil qilgan uchburchaklar ichki burchaklari yig'indisiga teng bo'ladi. Demak, parallelogramm ichki burchaklari yig'indisi $360°$ ga teng ekan.

Parallelogrammning alomatlari bilan tanishamiz.

1-teorema.

(1-alomat.) **Agar to'rtburchakning ikkita tomoni teng va parallel bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.**

Isbot. $ABCD$ to'rtburchakda $AB = DC$ va $AB \parallel DC$ bo'lsin (27-rasm). Uning BD diagonalini o'tkazamiz. Natijada ikkita teng ABD va CDB uchburchaklarga ega bo'lamiz (ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra), chunki ularda $AB = DC$ (shartga ko'ra), BD tomon – umumiy, $\angle 1 = \angle 2$ (AB va DC parallel to'g'ri chiziqlar hamda BD kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar bo'lgani uchun). Uchburchaklarning tengligidan, $\angle 3 = \angle 4$ ekani kelib chiqadi. Bu burchaklar AD va BC to'g'ri chiziqlar hamda BD kesuvchi bilan kesishishidan hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklar, demak, $AD \parallel BC$.



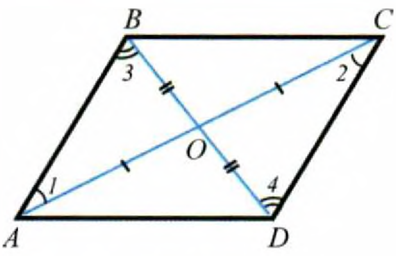
27- rasm.

Shunday qilib, $ABCD$ to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari jufti-jufti bilan parallel. Shuning uchun, parallelogramm ta'rifiga ko'ra $ABCD$ to'rtburchak – parallelogrammdir.

2-teorema.

(2-alomat.) **Agar to'rtburchakning diagonallari keshishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.**

Isbot. $ABCD$ to'rtburchakda O nuqta AC va BD diagonallarining kesishish nuqtasi hamda $AO = OC$ va $BO = OC$ tengliklar bajariladi (28- rasm). Uchburchaklar tengligining 1- alomatiga ko'ra, AOB va COD uchburchaklar



28- rasm.

teng ($AO = OC$, $BO = OD$ — shartga ko'ra, $\angle AOB = \angle COD$ — vertikal burchaklar), shuning uchun $AB = CD$ va $\angle 1 = \angle 2$. 1 va 2 burchaklarning tengligidan, $AB \parallel CD$ (to'g'ri chiziqlarning parallellik alomatiga ko'ra) kelib chiqadi.

Shunday qilib, $ABCD$ to'rtburchakda AB va CD tomonlar teng hamda parallel, demak, parallelogrammning 1- alomatiga ko'ra $ABCD$ to'rtburchak — parallelogrammdir.

Parallelogrammning yana quyidagi alomatlari bor:

3 - alomat. Agar to'rtburchakning qarama-qarshi tomonlari jufti-jufti bilan teng bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.

4- alomat. Agar to'rtburchakning qarama-qarshi burchaklari jufti-jufti bilan teng bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.

5- alomat. Agar to'rtburchakning ixtiyoriy bir tomoniga yopishgan burchaklari yig'indisi 180° ga teng bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.

Savol, masala va topshiriqlar

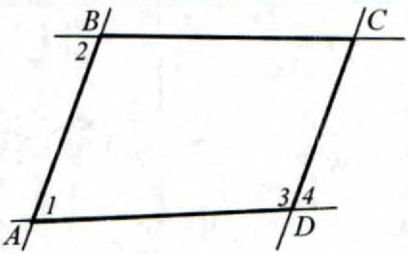
58. 1) Agar to'rtburchakning ikkita tomoni teng va parallel bo'lsa, bu to'rtburchak parallelogramm bo'lishini isbotlay olasizmi?

2) Agar to'rtburchakning diagonallari kesishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak parallelogramm bo'lishi qanday isbotlanadi?

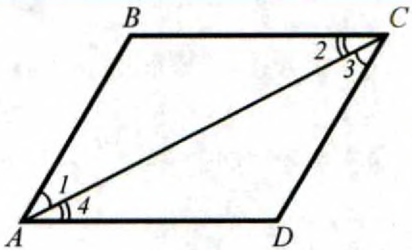
59. Agar: 1) $\angle 1 = 70°$, $\angle 3 = 110°$, $\angle 2 \neq \angle 4$; 2) $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 115°$ bo'lsa (29- rasm), u holda $ABCD$ to'rtburchak parallelogramm bo'ladimi? (Quyida yechish jarayonidagi muhim joylar ajratib ko'rsatilgan.)

Yechish. 1) $ABCD$ to'rtburchakda ikkita AB va CD tomonlar parallel, chunki $\angle 1 + \angle 3 = 70° + 110° =$ **180°**. Bu burchaklar — ***AB*** va ***DC*** to'g'ri chiziqlar hamda ***AD*** kesuvchi hosil qilgan **ichki bir tomonli burchaklar**. $AB \parallel DC$ bo'lgani sababli, $\angle 1 = \angle$**4** bo'ladi (**mos burchaklar**). $ABCD$ to'rtburchakning qolgan ikki ***AD*** va ***BC*** tomonlari parallel emas, chunki ichki almashinuvchi **1** va **2** burchaklar teng emas ($\angle 1 = \angle 4 \neq \angle 2$). Demak, $ABCD$ to'rtburchak **parallelogramm** bo'la olmaydi.

2) Xuddi yuqoridagiga o'xshash muhokama qilib, yechimni rasmiylashtirishni o'zingizga havola qilamiz.



29- rasm.



30- rasm.

60. 1) Parallelogramm tomonlari o‘rtalarini tutashtirishdan hosil bo‘lgan to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

2) Agar to‘rtburchakning qarama-qarshi tomonlari jufti-jufti bilan teng bo‘lsa, bu to‘rtburchak parallelogrammdir. Shuni isbotlang.

61. Agar to‘rtburchakning bir tomoniga yopishgan burchaklari yig‘indisi 180° ga teng bo‘lsa, bu to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

62. *ABC* uchburchakning *AO* medianasini *AO* medianaga teng *OP* kesmaga davom ettirildi. *ABPC* to‘rtburchakning parallelogramm ekanini isbot qiling.

63. *ABCD* to‘rtburchakda: $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (30- rasm). *ABCD* to‘rtburchak – parallelogramm ekanini isbot qiling. Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

Isbot. 1) $\angle 1 = \angle 3$. Bu burchaklar ... va ... to‘g‘ri chiziqlar hamda ... kesuvchi hosil qilgan ... . To‘g‘ri chiziqlarning parallellik alomatiga ko‘ra ... va ... to‘g‘ri chiziqlar parallel.

2) $\angle 2 = \angle 4$, demak, ... va ... to‘g‘ri chiziqlar ham parallel.

Shunday qilib, *ABCD* to‘rtburchak – parallelogramm, chinki uning tomonlari ... .

7- mavzu. TO‘G‘RI TO‘RTBURCHAK

Ta’rif. *Hamma burchaklari to‘g‘ri bo‘lgan parallelogramm* ***to‘g‘ri to‘rtburchak*** *deb ataladi* (31- *a* rasm).

To‘g‘ri to‘rtburchak parallelogrammning xususiy holi bo‘lgani uchun, u parallelogrammning barcha xossalariga ega bo‘ladi: to‘g‘ri to‘rtburchakning qarama-qarsi tomonlari teng; diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi; to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonali uni ikkita teng to‘g‘ri burchakli uchburchakka ajratadi.

To‘g‘ri to‘rtburchakning o‘ziga xos xossasini ko‘rib chiqamiz.

Teorema.

To‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari o‘zaro teng.

Isbot. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak berilgan bo‘lsin. $AC = BD$ bo‘lishini isbot qilamiz (31- *b* rasm).

To‘g‘ri burchakli ACD va DBA uchburchaklar ikki katetiga (AD — umumiy tomon, $CD = BA$) ko‘ra teng. Bundan, bu uchburchaklar gipotenuzalarining tengligi, ya’ni $AC = BD$ kelib chiqadi.

Bu teoremadan quyidagi teskari teorema kelib chiqadi.

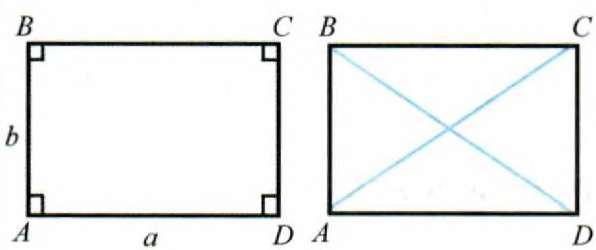
Teskari teorema.

Agar parallelogrammning diagonallari teng bo‘lsa, u to‘g‘ri to‘rtburchakdir.

Ushbu teoremani mustaqil isbot qilish, o‘zingizga havola qilinadi.

1- masala. Ikkita qo‘shni tomoni a va b bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakni yasang.

Yasash. A to‘g‘ri burchak yasaymiz (32- rasm). Uning tomonlarida $AD = a$ va $AB = b$ kesmalarni qo‘yamiz. B va D nuqtalar orqali $p \perp AB$ va $q \perp AD$ to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz. $p \perp AB$ va $AD \perp AB$ bo‘lgani uchun $p \parallel AD$ bo‘ladi. q to‘g‘ri chiziq AD to‘g‘ri chiziq bilan kesishgani sababli, u unga parallel bo‘lgan p to‘g‘ri chiziqni biror C nuqtada kesadi. Hosil bo‘lgan

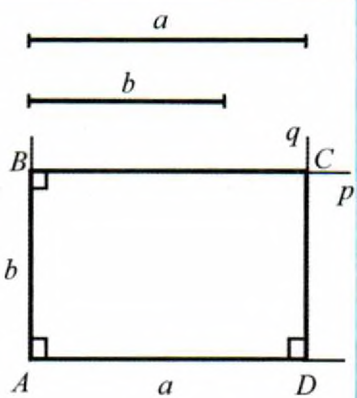


$\angle A = \angle B = \angle C =$
$= \angle D = 90°;$

$P = 2(a + b)$

a) *b)*

31- rasm.



32- rasm.

ABCD to'rtburchak – to'g'ri to'rtburchak bo'ladi. Unda yasashga ko'ra *A*, *B* va *D* burchaklar to'g'ri, *C* burchak ham to'g'ri. (Agar to'g'ri chiziq ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikular bo'lsa, u ikkinchi to'g'ri chiziqqa ham perpendikular bo'ladi.)

To'g'ri to'rtburchaklarni yasashning boshqa usullari ham bor.

2-masala. *ABCD* to'g'ri to'rtburchak *B* burchagining bissektrissasi *AD* tomonni *P* nuqtada kesadi hamda uni $AP = 17$ sm va $PD = 21$ sm li kesmalarga ajratadi (33- rasm). Shu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

Yechish. 1) *ABCD* – to'g'ri to'rtburchak bo'lgani uchun, $AD \parallel BC$ va shunga ko'ra $\angle 2 = \angle 3$. Biroq, shartga ko'ra $\angle 2 = \angle 1$, demak, $\angle 1 = \angle 3$ hamda $\triangle ABP$ – asosi *BP* bo'lgan teng yonli uchburchak. Shunday qilib, $AB = AP = 17$ sm.

2) $AD = AP + PD = 17 + 21 = 38$ (sm); $P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (17 + 38) =$ $= 2 \cdot 55 = 110$ (sm).

Javob: $P_{ABCD} = 110$ sm.

Savol, masala va topshiriqlar

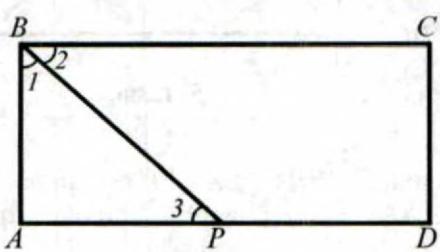
64. 1) Qanday to'rtburchakni to'g'ri to'rtburchak deyiladi?
2) To'g'ri to'rtburchakning diagonallari teng ekanligini isbotlang.

65. *ABCD* to'g'ri to'rtburchakda *AB* tomon 32 sm ga teng, *BD* diagonali esa *AB* tomon bilan 60° li burchak hosil qiladi. *AC* diagonalni toping (34- rasm). Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.

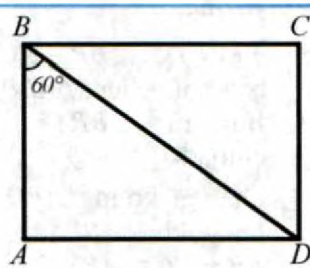
Yechish. 1) To'g'ri burchakli *ABD* uchburchakda $\angle A = 90°$ va $\angle B = 60°$, shuning uchun $\angle D = ...°$, va ... yotgan katetning xossasiga ko'ra ega bo'lamiz: $BD = 2 \cdot ... = ...$ (sm).

2) To'g'ri to'rtburchakda diagonallar ... bo'lgani uchun, $AC = ... =$ $= ...$ (sm). *Javob:* $AC = ...$ sm.

66. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 54 sm ga, tomonlaridan biri esa ikkinchisidan 3 sm ga uzun. Qo'shni tomonlar uzunliklarini toping.



33- rasm.



34- rasm.

67. To'g'ri to'rtburchakning bissektrisalaridan biri to'g'ri to'rtburchak tomonini teng ikkiga bo'ladi. To'g'ri to'rtburchakning kichik tomoni 12 sm ga teng bo'lsa, uning perimetrini toping.

68. *ABCD* to'g'ri to'rtburchakda *AC* diagonal o'tkazilgan. *BAC* burchak *ACB* burchakdan 2 marta katta ekani ma'lum. Shu burchaklarni toping.

69. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 24 sm. To'g'ri to'rtburchakning ixtiyoriy ichki nuqtasidan uning tomonlarigacha bo'lgan masofalar yig'indisini toping.

70. 1) Agar to'rtburchak diagonallari teng va ular kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak to'g'ri to'rtburchak bo'lishini isbot qiling.

2) Agar to'rtburchakning uchta ichki burchagi to'g'ri burchak bo'lsa, uning qarama-qarshi tomonlari parallel bo'ladi. Buni isbot qiling.

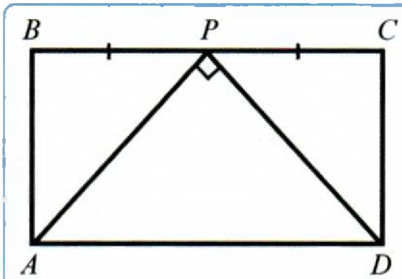
71. *ABCD* to'g'ri to'rtburchakning *AC* va *BD* diagonallari *O* nuqtada kesishadi, shu bilan birga, $\angle AOB = 50°$. $\angle DAO$ ni toping. Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.

Yechish. 1) *ABCD* — to'g'ri to'rtburchak bo'lgani uchun, uning diagonallari ... va kesishish nuqtasida ... bo'linadi, bundan ΔAOB — ... va $\angle BAO = \angle$ ... = (180° − ...°) : ... = ...° ekani kelib chiqadi.

2) $\angle DAO = \angle A - \angle$... = 90° − ...° = ...°. *Javob*: $\angle DAO$ = ...°.

72. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi yer maydonining bo'yi 270 m va u enidan 3 marta uzun. Shu maydonning perimetrini toping.

73. *ABCD* to'g'ri to'rtburchakning perimetri 24 sm ga teng. *P* nuqta *BC* tomonning o'rtasi, $\angle APD = 90°$ (35- rasm). Shu to'g'ri to'rtburchakning tomonlarini toping. Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.



35- rasm.

Yechish. $BP = PC$ va $AB = DC$ bo'lgani uchun, $\Delta ABP = \Delta DCP$ (...). Bundan $\angle BPA = \angle CPD$ kelib chiqadi.

Shartga ko'ra $\angle APD$ = ...°, demak, $\angle BPA + \angle CPD$ = ...° bo'ladi. U holda $\angle BPA = 45°$ va ΔABP — teng yonli. Shunday qilib, $AB + BC = AB + 2AB$, ya'ni $3AB = 12$ sm, bundan AB = ... sm, BC = ... sm.

8- mavzu. ROMB

Ta'rif. *Tomonlari teng bo'lgan parallelogramm **romb** deyiladi* (36- rasm).

Romb parallelogrammning umumiy xossalaridan tashqari quyidagi xossaga ega.

Teorema.

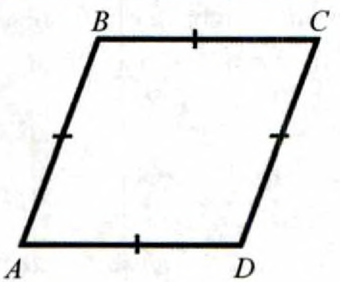
Rombning diagonallari o'zaro perpendikular va rombning burchaklarini teng ikkiga bo'ladi.

Isbot. $ABCD$ romb berilgan bo'lsin (37- rasm). $AC \perp BD$ va har bir diagonal rombning mos burchaklarini teng ikkiga bo'lishini (masalan, $\angle BAC = \angle DAC$) isbotlaymiz.

Rombning ta'rifiga ko'ra $AB = AD$, shuning uchun BAD uchburchak teng yonli. Romb parallelogramm bo'lgani uchun, uning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi, ya'ni $BO = OD$. Demak, AO — teng yonli BAD uchburchakning medianasi. Teng yonli uchburchakning xossasiga ko'ra, uning asosiga o'tkazilgan mediana ham bissektrisa, ham balandlik bo'ladi. Shuning uchun, $AC \perp BD$ va $\angle BAC = \angle DAC$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

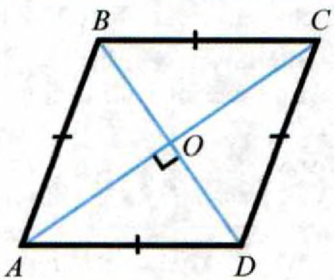
Savol, masala va topshiriqlar

74. 1) Romb deb nimaga aytiladi?
2) Romb diagonallari o'zaro perpendikular ekanini isbotlang.



$AB = BC = CD = AD$

36- rasm.



37- rasm.

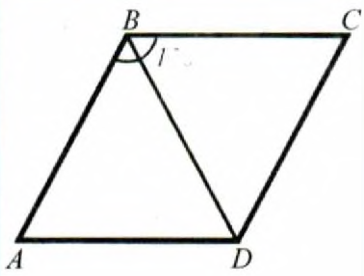
75. Agar $ABCD$ rombda $\angle B = 120°$ va $BD = 25$ sm bo'lsa, rombning perimetrini toping (38- rasm). Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.

Yechish. 1) Rombning diagonallari ... ajratadi, va demak, $\angle ABD = \angle ... = ...°$ bo'ladi.

2) ABD uchburchakda $AB = ...$ (rombning tomonlari ... bo'lgani uchun) va $\angle ABD = ...°$, bu uchburchak ... va $AB = ... = ... = ...$ (sm).

3) $P_{ABCD} = 4 \cdot ... = ...$ (sm).

Javob: $P_{ABCD} = ...$ sm.



38- rasm.

76. 1) Qanday ikkita teng uchburchakdan romb yasash mumkin?

2) Qanday to'rtta teng uchburchakdan romb yasash mumkin?

77. Rombning: 1) kichik diagonali uning tomoniga teng; 2) tomonlaridan biri bilan uning diagonallari hosil qiladigan burchaklari nisbati 4 : 5 ga teng. Rombning burchaklarini toping.

78. Rombning hamma balandliklari o'zaro teng ekanini isbot qiling.

79. Isbot qiling: 1) hamma tomonlari teng to'rtburchak rombdir;

2) ikkita qo'shni tomoni teng parallelogramm rombdir.

80. Parallelogrammning diagonallari o'zaro perpendikular bo'lganda va faqat shunda, uning romb bo'lishini isbot qiling.

81. Rombning perimetri 72 sm ga teng. Uning tomonlarini toping.

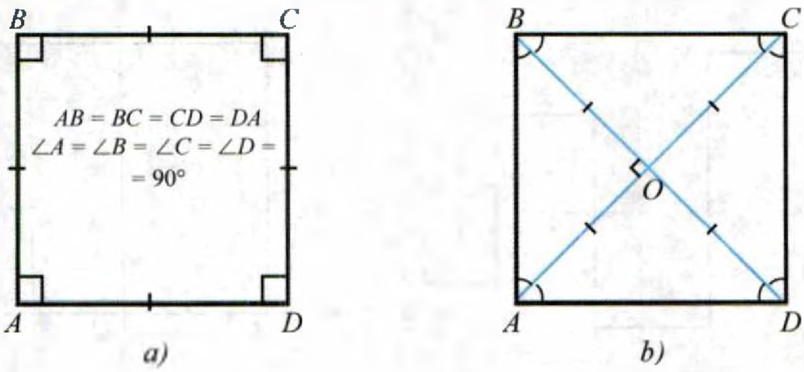
82. Rombning diagonallari bilan tomonlari orasida hosil bo'lgan burchaklarning nisbati 2 : 7 kabi. Rombning burchaklarini toping.

83. Burchaklaridan biri 60°, kichik diagonalining uzunligi 16 sm bo'lgan romb perimetrini toping.

9- mavzu. KVADRAT

Ta'rif. *Tomonlari teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak* ***kvadrat*** *deb ataladi.*

Kvadrat va rombning ta'riflaridan kvadrat burchaklari to'g'ri bo'lgan romb ekanligi kelib chiqadi (39- *a* rasm). Kvadrat ham parallelogramm, ham



39- rasm.

to‘g‘ri to‘rtburchak, ham romb bo‘lgani uchun bularning barcha xossalariga egadir. Kvadratning asosiy xossalarini keltiramiz.

1. Kvadratning hamma burchaklari to‘g‘ri.

2. Kvadratning diagonallari o‘zaro teng.

3. Kvadratning diagonallari o‘zaro perpendikular va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi hamda kvadratning burchaklarini teng ikkiga bo‘ladi (39- *b* rasm).

Shu xossalarni mustaqil isbot qiling.

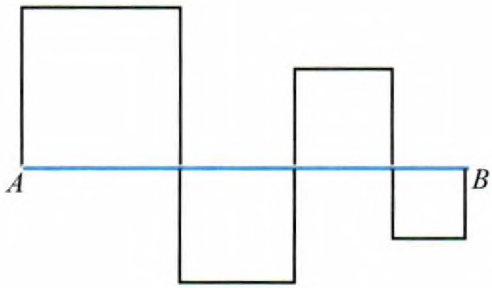
Savol, masala va topshiriqlar

84. a) Kvadrat deb nimaga aytiladi? Kvadratning xossalarini ayting.
b) Kvadratga: 1) «parallelogramm»; 2) «romb»; 3) «to‘g‘ri to‘rtburchak» tushunchasi yordamida ta’rif bering.

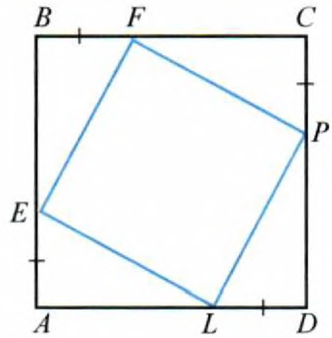
85. Kvadrat — kvadrat bo‘lmagan: 1) to‘g‘ri to‘rtburchakka nisbatan; 2) rombga nisbatan qanday alohida xossalarga ega?

86. 1) Kvadratning tomoni 20 sm ga teng. Diagonallari kesishish nuqtasidan tomonlaridan birigacha bo‘lgan masofani toping.
2) Kvadratning diagonali bilan tomoni orasidagi burchak nimaga teng?
3) Agar kvadrat tomonlarining o‘rtalari ketma-ket to‘g‘ri chiziq kesmasi bilan birlashtirilsa, natijada qanday shakl hosil bo‘ladi?
4) Kvadratning perimetri 32 sm ga teng. Uning tomoni nimaga teng?

87. 1) To‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yi 32 sm, eni esa 28 sm ga teng. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetriga teng bo‘lgan kvadratning tomonini toping.



40- rasm.



41- rasm.

2) $AB = 19$ sm li kesmaga kvadratchalar yasalgan bo'lib, ularning bir tomoni AB tomonda, ikkita qo'shni kvadratlar umumiy uchga ega va AB dan turli tomonda joylashgan (40- rasm). AB kesmada yotmagan kvadratlar tomonlarining uzunliklari yig'indisini toping.

88. 1) Berilgan: $ABCD$ – kvadrat, $AE = BF = CP = DL$ (41- rasm).

Isbot qilish kerak: $EFPL$ – kvadrat ekanligini.

2) To'rtburchakning kvadrat ekanligini tekshirish uchun diagonallarining tengligini va perpendikularligini tekshirish kifoya qiladimi?

89. Qanday: 1) ikkita; 2) to'rtta teng uchburchakdan kvadrat hosil qilish mumkin? Mumkin bo'lgan yechimlarni ko'rsating.

90. Kvadratning diagonallari kesishish nuqtasidan tomonlaridan birigacha bo'lgan masofa 2 dm 3 sm ga teng. Kvadratning perimetrini toping.

91. 1) Kvadratning perimetri 30 sm ga teng. Uning tomoni nimaga teng?

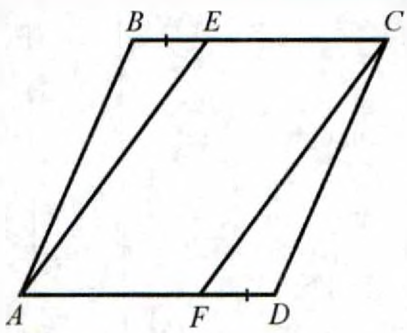
2) $ABCD$ kvadratda AC diagonal o'tkazilgan. a) ACD uchburchak turini; b) ACD uchburchakning burchaklarini toping.

1- § ga doir qo'shimcha mashqlar

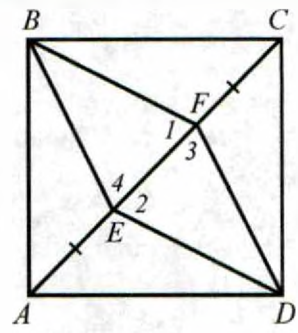
92. $ABCD$ teng yonli trapetsiyada $BC = 20$ sm, $AB = 24$ sm va $\angle D = 60°$ bo'lsa, uning AD asosini toping.

93. Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 125° ga teng. Trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

94. Parallelogramm tomonlarining uzunliklari 4 sm va 6 sm ga teng. Shu parallelogramm o'tkir burchagining bissektrisasi katta tomonni qanday kesmalarga bo'ladi?



42- rasm.



43- rasm.

95. Qavariq $ABCD$ to‘rtburchakda: $AB = CD$, $\angle B = 70°$, $\angle BCA = 60°$, $\angle ACD = 50°$. $BC = AD$ ekanini isbot qiling.

96. $ABCD$ parallelogrammning BC va AD tomonlarida E va F nuqtalar shunday olinganki, unda $BE = DF$. $AECF$ to‘rtburchak – parallelogramm ekanini isbotlang (42- rasm). Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

Isbot. Shartga ko‘ra $ABCD$ parallelogramm bo‘lgani uchun, uning BC va AD qarama-qarshi tomonlari ... va ..., ya’ni ... ‖ ... va ... = ... EC = ... – ..., AF = ... – ... va $BE = DF$ ekanligidan, EC = ... bo‘ladi.

Shunday qilib, $ABCD$ to‘rtburchakda ikkita qarama-qarshi tomonlar ... va ... (... ‖ ..., ... ‖ ...), demak, $AECF$ – ... .

97. O‘tkir burchagi A bo‘lgan $ABCD$ parallelogramm berilgan. B uchidan AD tomonga BK perpendikular o‘tkazilgan, $AK = BK$. C va D burchaklarni toping.

98. 1) $ABCD$ – to‘g‘ri to‘rtburchak. BAC va BDC burchaklarning bissektrisalari 45° li burchak ostida kesishadi. $ABCD$ – kvadrat ekanini isbot qiling.

2) Agar to‘rtburchakning diagonallari o‘zaro teng bo‘lib, to‘rtburchakning burchaklarini teng ikkiga bo‘lsa, bunday to‘rtburchak kvadrat bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

99. 1) Berilgan: $ABCD$ – kvadrat, $AE = CF$ (43- rasm).
Isbot qilish kerak: $BEDF$ – romb ekanligini.

2) Rombning perimetri 16 sm ga, qarama-qarshi tomonlari orasidagi masofa 2 sm ga teng. Rombning burchaklarini toping.

100. Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari to‘g‘ri burchak ostida kesishsa, uning kvadrat ekanini isbotlang.

1- TEST

1. Qavariq beshburchakning burchaklari kattaliklari $2:3:4:5:6$ kabi nisbatda. Burchaklardan kattasining miqdorini toping.

A) $136°$; B) $162°$; C) $156°$; D) $148°$.

2. Ko'pburchak ichki burchaklarining va bitta tashqi burchagining yig'indisi $2070°$ ga teng. Shu ko'pburchakning tomonlari soni nechta?

A) 13 ta; B) 16 ta; C) 11 ta; D) 15 ta.

3. $ABCD$ trapetsiyaning kichik asosi 6 ga teng. Agar ABE uchburchakning ($BE \parallel CD$) perimetri 36 ga teng bo'lsa, trapetsiyaning perimetrini toping.

A) 48; B) 45; C) 42; D) 52.

4. Trapetsiyaning uchta tomoni 4 sm dan, to'rtinchi tomoni esa 8 sm. Trapetsiyaning eng katta burchagini toping.

A) $140°$; B) $120°$; C) $150°$; D) $60°$.

5. $ABCD$ trapetsiyada AC diagonal CD yon tomonga perpendikular. Agar $\angle D = 72°$ va $AB = BC$ bo'lsa, $\angle ABC$ ni toping.

A) $150°$; B) $144°$; C) $136°$; D) $108°$.

6. To'g'ri to'rtburchakning eni 5 ga teng, bo'yi undan 7 ga ortiq. Shu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

A) 34; B) 32; C) 26; D) 30.

7. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 32 ga, qo'shni tomonlarining ayirmasi 2 ga teng. Uning tomonlarini toping.

A) 8 va 6; B) 12 va 10; C) 9 va 7; D) 11 va 9.

8. Rombning diagonali tomoni bilan $25°$ li burchak tashkil qiladi. Rombning katta burchagini toping.

A) $130°$; B) $150°$; C) $120°$; D) $115°$.

9. Romb diagonallarining tomonlari bilan hosil qilgan burchaklari kattaliklarining nisbati $2:7$ ga teng. Rombning kichik burchagini toping.

A) $20°$; B) $40°$; C) $30°$; D) $70°$.

10. Qavariq to'rtburchakning burchaklaridan biri to'g'ri burchak, qolganlari esa o'zaro $6:5:4$ nisbatda. To'rtburchakning kichik burchagini toping.

A) $108°$; B) $60°$; C) $72°$; D) $90°$.

11. Ikkita burchagining yig'indisi $100°$ ga teng bo'lgan parallelogrammning katta burchagini toping.

A) $100°$; B) $110°$; C) $130°$; D) $150°$.

Tarixiy ma'lumotlar

Qadimda Misr va Bobil matematikasida to'rtburchaklarning quyidagi turlari uchraydi: kvadratlar, to'g'ri to'rtburchaklar, to'g'ri burchakli va teng yonli trapetsiyalar.

O'rta Osiyolik olimlardan **Abu Rayhon Beruniy** ham to'rtburchaklarning turlariga mufassal to'xtalgan. U o'zining «Astronomiya san'atidan boshlang'ich ma'lumot beruvchi kitob» nomli asarida «To'rtburchaklarning turi qanday?» — deb savol qo'yadi va quyidagicha javob beradi:

«Ulardan birinchisi — kvadrat, uning barcha tomonlari teng, barcha burchaklari to'g'ri, diagonallari, ya'ni qarama-qarshi burchaklarini (uchini) tutashtiruvchi chiziqlari esa o'zaro teng.

Ikkinchisi — to'g'ri to'rtburchak, u kvadratga nisbatan uzunroq, barcha burchaklari to'g'ri, turli tomonlari turlicha, ularning faqat qarama-qarshi tomonlari va diagonallari teng.

Uchinchisi — romb, uning to'rtta tomoni teng, ammo diagonallari turlicha, burchaklari esa to'g'ri burchak emas.

To'rtinchisi — romboid, uning diagonallari turlicha, faqat ikkitadan qarama-qarshi tomonlari teng.

Bu shakllardan farqli to'rtburchaklar trapetsiyalar deyiladi».

Kvadrat lotincha so'z bo'lib, «to'rt burchakli» degan ma'noni bildiradi. Beruniy arabcha «*murabba*» atamasini ishlatgan, lotinchaga mana shu arabcha atama tarjima qilingan. To'g'ri to'rtburchakning arabchasi «*mustatil*» — «cho'zinchoq».

Romb atamasining vujudga kelishi turlicha tushuntiriladi. U yunoncha so'z bo'lib, romb «*aylanuvchi jism*», «*pildiroq*» ma'nosini beradi. Geometriyaga bu termin pildiroq kesimining rombga o'xshashi tufayli kirgan. Arabchada «*romb*» uchun «*muayyan*» atamasi olingan.

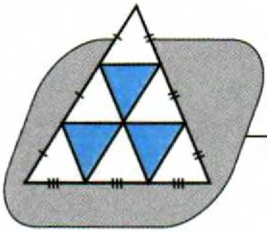
Trapetsiya yunoncha so'z bo'lib, tajrimasi «*stolcha*» (ovqat yeyiladigan stol)ga to'g'ri keladi, lug'aviy ma'nosi — to'rt oyoqlik. Haqiqatan, yunoncha «*trapedzion*» — stolcha, xo'rak stoli.

Beruniyda «*trapetsiya*» — «*muxarrif*» deb nomlangan, bu atama yunoncha «*trapedzion*»ning arabchaga aynan tajrimasi.

Parallelogramm yunoncha so'z bo'lib, to'g'ri chiziqli yuza degan ma'noni beradi. «Parallelogramm» arabchada «*mutavozi al-azla*», ya'ni «asoslari parallel» degan ma'noni bildiradi.

Beruniy parallelogrammga quyidagicha ta'rif beradi:

«U to'rtburchakli shakl, uning har qanday ikki qarama-qarshi tomoni parallel. Uning qarama-qarshi burchaklarining uchlarini tutashtiruvchi chiziq diagonal deb ataladi».



2- §. FALES TEOREMASI VA UNING NATIJALARI

10- mavzu. KESMALARNING NISBATI. PROPORSIONAL KESMALAR

1. Kesmalarning nisbati. Bizga o'zaro parallel l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar hamda ularni kesuvchi a to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin (44- rasm).

Agar kesuvchi a to'g'ri chiziq, l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlarni A va B nuqtalarda kesib o'tsa, l_1 va l_2 parallel to'g'ri chiziqlar a to'g'ri chiziqdan AB kesma *ajratadi* deb aytiladi.

Uchta l_1, l_2 va l_3 parallel to'g'ri chiziqlar a to'g'ri chiziqni A, B, C nuqtalarda kesib, AB va BC kesmalar ajratsin (45- rasm).

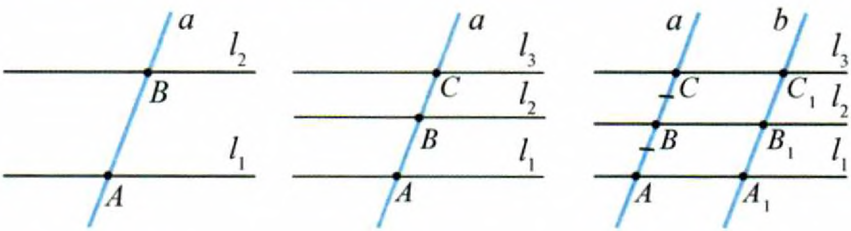
Agar $AB = BC$ bo'lsa, parallel to'g'ri chiziqlar a to'g'ri chiziqdan *teng kesmalar* ajratadi deb aytiladi (46- rasm).

Teorema.

Agar $a \parallel b$ bo'lib, l_1, l_2 va l_3 parallel to'g'ri chiziqlar a to'g'ri chiziqdan teng kesmalar ajratsa, b to'g'ri chiziqdan ham teng kesmalar ajratadi.

Isbot. To'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtalarini mos ravishda A, B, C va A_1, B_1, C_1 harflar bilan belgilaylik (46- rasm).

Teorema shartiga ko'ra $a \parallel b$ va $AB = BC$. $A_1B_1 = B_1C_1$ ekanini isbot qilishimiz kerak.



44- rasm. 45- rasm. 46- rasm.

To‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lgan ABB_1A_1 va BCC_1B_1 to‘rt-burchaklar parallelogrammdir, chunki ular o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlarning kesishishidan hosil bo‘lgan. Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari bo‘lgani uchun $AB = A_1B_1$ va $BC = B_1C_1$ bo‘ladi. Bundan $A_1B_1 = B_1C_1$ kelib chiqadi, chunki shartga ko‘ra $AB = BC$. Teorema isbot bo‘ldi.

Eslatma! Bu holda $AB = BC = A_1B_1 = B_1C_1$ ekanini esda tutish kerak.

Ta'rif. *Ikki kesmaning nisbati deb, ular bir ismli birliklar bilan ifodalanganda, ulardan biri ikkinchisidan necha marta katta yoki kichikligini ko‘rsatuvchi ismsiz songa aytiladi.*

Masalan, a va b kesmalar mos ravishda 6 sm va 18 sm ga teng bo‘lsin. Kesmalarning nisbati bo‘linma (kasr) shaklida ifodalanadi.

$$\frac{a}{b} = \frac{6\text{ sm}}{18\text{ sm}} = \frac{1}{3} \quad \text{yoki} \quad \frac{b}{a} = \frac{18\text{ sm}}{6\text{ sm}} = 3.$$

1-izoh. Agar kesmalar har xil ismli bo‘lsa, dastlab ularni bir xil ismga keltirib, so‘ngra nisbat olish kerak, aks holda xato natijaga kelinadi.

2-izoh. Ikki kesmaning nisbati o‘lchov birligining qanday tanlanishiga bog‘liq emas. Bir o‘lchov birligidan boshqa o‘lchov burligiga o‘tishda kesmalarning uzunliklarini ifodalovchi sonlar bir xil songa ko‘paytiriladi, shuning uchun bunda ikki kesmaning nisbati o‘zgarmaydi.

3-izoh. $\frac{a}{b}$ nisbatda, a — nisbatning *oldingi hadi*, b — nisbatning *keyingi hadi* deyilishini eslatib o‘tamiz.

Agar $AB \neq BC$ bo‘lib (45-rasm), $\frac{AB}{BC} = k$ bo‘lsa, l_1, l_2 va l_3 parallel to‘g‘ri chiziqlar a to‘g‘ri chiziqdan *k nisbatdagi kesmalar ajratadi* deb aytiladi.

2. Proporsional kesmalar.

Ta'rif. *Agar* $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ *bo‘lsa, u holda* AB *va* BC, A_1B_1 *va* B_1C_1 *kesmalar **proporsional kesmalar** deb ataladi. Bu kesmalarning uzunliklarini ifodalovchi sonlar **proporsional sonlar** bo‘ladi.*

4-izoh. Bu yerda ham va bundan keyin ham ko‘pincha AB, CD va hokazo kesmalar deganda, ularning uzunliklarini ifoda etuvchi sonlarni tushunamiz.

Buning natijasida kesmalarning nisbati va kesmalardan tuzilgan proporsiyalar sonlar nisbatlarining va sonlardan tuzilgan proporsiyalarning barcha xossalariga ega bo‘ladi.

Shuning uchun bu yerda ularni keltirmaymiz, chunki ular 6- sinf matematika kursidan Sizga tanish.

Masala. Uchta kesma berilgan: $a = 6$ sm, $b = 3$ sm, $c = 4$ sm. To'rtinchi d kesmaning uzunligi qanday bo'lganda bu to'rtta kesma proporsional bo'ladi (izlangan d kesma berilgan kesmalarning har biridan katta bo'lish sharti bilan)?

Yechish. Berilganlarni va shartni hisobga olsak, $b < c < a < d$ ekani ravshan. Buning uchun berilgan kesmalar ichidan ikkita eng kattasining uzunliklarini ifodalovchi sonlar ko'paytmasini eng kichigiga bo'lish kifoya, ya'ni $d = a \cdot c : b = 6 \cdot 4 : 3 = 8$ (sm).

Javob: $d = 8$ sm.

Savol, masala va topshiriqlar

101. 1) Ikki kesmaning nisbati deganda nimani tushunasiz?
2) Ikki kesmaning nisbati o'lchov birligiga bog'liqmi?
3) Proporsional kesmalar deb nimaga aytiladi?
4) Nisbatning qanday xossalarini bilasiz?
5) Proporsiyaning avvaldan ma'lum bo'lgan xossalarini ayting va formula ko'rinishida yozing.

102. $AC = 8$ sm va $BD = 16$ sm. 1) Bu kesmalar uzunliklarining nisbatini toping. 2) Olingan kesmalarning uzunliklari detsimetrda (millimetrlarda, metrlarda) ifodalansa, ular uzunliklarining nisbati o'zgaradimi?

103. 1) C nuqta AB kesmani $AC : CB = 3 : 2$ nisbatda bo'ladi. $AC : AB$ va $AB : CB$ nisbatlarni toping.
2) C nuqta AB kesmani $AC : CB = 2 : 3$ nisbatda bo'ladi. AC kesmaning uzunligi 4,8 dm. AB va CB kesmalarning uzunliklarini toping.

104. 1) Agar ikki kesmaning nisbati $2{,}5 : 1{,}5$ kabi, qolgan ikkitasining nisbati $75 : 45$ kabi bo'lsa, bu kesmalar proporsionalmi?
2) a bilan b va c bilan d kesmalar bir-biriga proporsional kesmalar. Agar $a = 5$ sm, $b = 80$ mm, $d = 1$ dm bo'lsa, c ni toping.

105. Uzunliklari quyidagicha bo'lsa, a bilan b va c bilan d kesmalar proporsional bo'ladimi:
1) $a = 1{,}6$ sm, $b = 0{,}6$ sm, $c = 4{,}8$ sm, $d = 1{,}8$ sm;
2) $a = 50$ sm, $b = 6$ dm, $c = 10$ dm, $d = 9{,}5$ dm?

106. Ikkita AB va CD kesmalar berilgan. E va F nuqtalar mos ravishda AB va CD kesmalarda yotadi. AE, EB va CF, FD kesmalar proporsional. $AB \cdot FD = CD \cdot EB$ ekanini isbotlang.

107. C nuqta AB kesmani $AC : CB = 1 : 2$ nisbatda bo'ladi. $AC : AB$ va $CB : AB$ nisbatlarni toping.

108. 1) Kesma 4 : 3 nisbatda ikki bo'lakka bo'lingan. Agar kichik bo'lak kattasidan 5 sm qisqa bo'lsa, kesmaning har bir bo'lagi uzunligini toping.
2) Uzunligi 12 sm ga teng bo'lgan AB kesmani C nuqta $AC : CB = 5 : 3$ nisbatda bo'ladi. AC va CB kesmalarning uzunligini toping.

109. 1) a bilan b va c bilan d kesmalar bir-biriga proporsional kesmalar. Agar $a = 15$ sm, $b = 50$ mm, $d = 2$ dm bo'lsa, c ni toping.
2) $a = 2$ sm, $b = 17{,}5$ sm, $c = 16$ sm, $d = 35$ sm, $e = 4$ sm bo'lsa, a, b, c, d va e kesmalardan proporsional juftlarni tanlab oling.

11- mavzu. FALES TEOREMASI

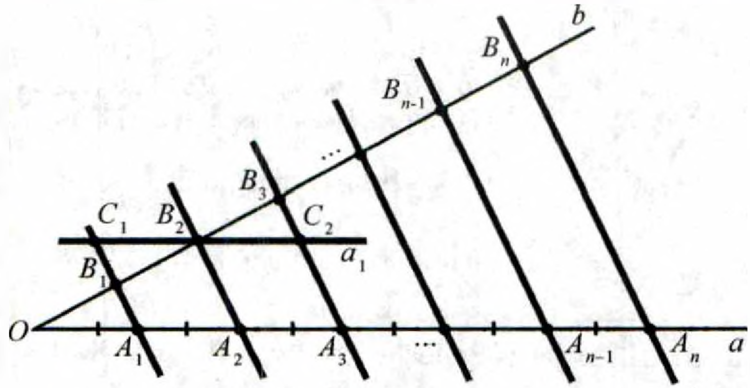
Teorema.

Agar burchak tomonlarini kesuvchi parallel to'g'ri chiziqlar uning bir tomonidan teng kesmalar ajratsa, ular ikkinchi tomonidan ham teng kesmalar ajratadi.

Isbot. O burchakning uchidan boshlab a nurda (tomonda) o'zaro teng OA_1, A_1A_2, A_2A_3, ... kesmalar qo'yilgan va ularning oxirlari (A_1, A_2, A_3, ...) orqali b tomonni B_1, B_2, B_3, ... nuqtalarda kesuvchi A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan bo'lsin (47- rasm).

Endi hosil bo'lgan OB_1, B_1B_2, B_2B_3, ... kesmalarning o'zaro tengligini isbotlash talab etiladi. Masalan, $OA_1 = A_1A_2$ bo'lsa, $OB_1 = B_1B_2$ bo'lishini isbotlaymiz.

Buning uchun B_2 nuqtadan a nurga parallel a_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq A_1B_1 va A_3B_3 to'g'ri chiziqlar bilan mos ravishda C_1 va



47- rasm.

C_2 nuqtalarda kesishsin. Shartga ko'ra $OA_1 = A_1A_2$ va $A_1C_1B_2A_2$ parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari bo'lgani uchun $A_1A_2 = C_1B_2$ bo'ladi. $OA_1 = A_1A_2$ va $A_1A_2 = C_1B_2$ lardan esa $OA_1 = C_1B_2$ ga ega bo'lamiz.

OA_1B_1 va $B_2C_1B_1$ uchburchaklarda $OA_1 = C_1B_2$ (isbotga ko'ra), shuningdek, $\angle A_1OB_1 = \angle C_1B_2B_1$ va $\angle OA_1B_1 = \angle B_2C_1B_1$ – ular a va a_1 parallel to'g'ri chiziqlarni mos ravishda b nur va A_1B_1 to'g'ri chiziq kesib o'tganda hosil bo'lgan ichki almashinuvchi burchaklardir.

Uchburchaklar tengligining ikkinchi alomatiga ko'ra bu uchburchaklar o'zaro teng: $\Delta\, OA_1B_1 = \Delta\, B_2C_1B_1$. Bundan OB_1 va B_1B_2 mos tomonlarning tengligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar $OA_1 = A_1A_2$ bo'lsa, $OB_1 = B_1B_2$ bo'lishi isbotlandi.

Xuddi shunga o'xshash qolgan kesmalarning tengligi isbotlanadi.

Eslatma! Fales teoremasi shartida burchak o'rniga har qanday ikki to'g'ri chiziqni olish mumkin bo'ladi, bunda teoremaning xulosasi ilgarigicha qoladi:

berilgan ikki to'g'ri chiziqni kesuvchi va to'g'ri chiziqlarning biridan teng kesmalar ajratuvchi parallel to'g'ri chiziqlar ikkinchi to'g'ri chiziqdan ham teng kesmalar ajratadi.

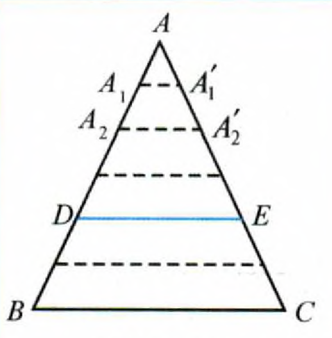
Fales teoremasi yordamida quyidagi muhim teoremani isbot qilish mumkin.

Teorema.

Uchburchakning bir tomoniga parallel to'g'ri chiziq uning qolgan ikki tomonini proporsional kesmalarga ajratadi.

Isbot. Berilgan $\Delta\, ABC$ da $DE \parallel BC$ bo'lsin. Isbot qilish kerak:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$



48- rasm.

Biror k_1 o'lchov birligi AD kesmaga m marta ($AD = m \cdot k_1$) va DB kesmaga esa n marta ($DB = n \cdot k_1$) joylashadi deylik (48- rasm). Bu holda kesmalarning nisbati $\frac{m}{n}$ ratsional son bilan ifodalanadi, ya'ni $\frac{AD}{DB} = \frac{m \cdot k_1}{n \cdot k_1} = \frac{m}{n}$ bo'ladi. Demak, $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$. Bu tenglik, agar AD kesmada m ta teng bo'lak bo'lsa, DB kesmada bunday bo'laklardan n ta bo'lishini ko'rsatadi.

Har bir bo'linish nuqtasidan DE va BC ga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz.

Fales teoremasiga ko'ra, AE va EC kesmalar teng bo'laklarga bo'linadi. Agar AC tomon uchun k_2 ni o'lchov birligi sifatida qabul qilsak, u holda bunday bo'laklardan AE da m ta ($AE = m \cdot k_2$) va EC da n ta ($EC = n \cdot k_2$) joylashadi. Demak, $\frac{AE}{EC} = \frac{m \cdot k_2}{n \cdot k_2} = \frac{m}{n}$, ya'ni $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$ ekan.

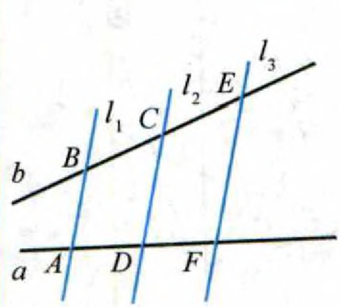
Shunday qilib, $\frac{AD}{DB} = \frac{m}{n}$ va $\frac{AE}{EC} = \frac{m}{n}$, bundan $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

Bu teorema ixtiyoriy ikki (a, b) to'g'ri chiziqni parallel (l_1, l_2, l_3) to'g'ri chiziqlar kesib o'tganda hosil bo'ladigan kesmalar uchun ham o'rinlidir (49- rasm). Buni o'zingiz isbot qiling.

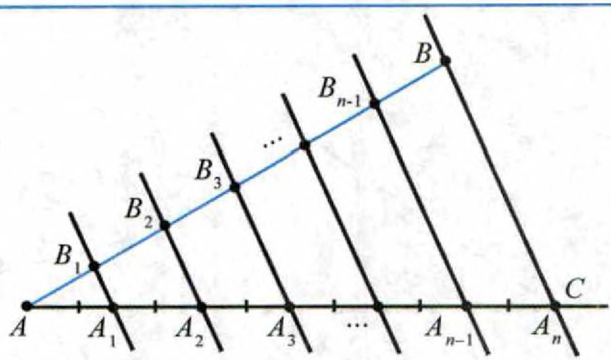
Eslatma! m va n lar berilgan o'lchov birliklarida butun sonlar bilan ifoda qilinmasa, unda shunday mayda birlik olish kerakki, AD va DB larga umumiy o'lchov bo'la olsin.

Masala. (*Kesmani teng bo'laklarga bo'lish.*) Berilgan AB kesmani n ta teng bo'lakka bo'ling.

Yechish. AB kesma berilgan bo'lsin. Uni n ta teng bo'lakka bo'lishni ko'rsatamiz. A nuqtadan AB to'g'ri chiziqda yotmaydigan AC nurni o'tkazamiz va unda A nuqtadan boshlab n ta AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ teng kesmalarni, ya'ni berilgan AB kesmani masala shartidan kelib chiqib nechta bo'lakka bo'lish zarur bo'lsa, shuncha teng kesmani qo'yamiz (50- rasm, $n = 6$). So'ngra A_nB to'g'ri chiziqni o'tkazamiz (A_n nuqta – oxirgi kesmaning oxiri) va A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} nuqtalar orqali A_nB to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar AB kesmani B_1, B_2, B_3, ..., B_{n-1} nuqtalarda kesadi va uni Fales teoremasiga ko'ra n ta teng bo'lakka bo'ladi: $AB_1 = B_1B_2 = ... = B_{n-1}B$.



49- rasm.



50- rasm.

Savol, masala va topshiriqlar

110. 1) Fales teoremasini ayting.
2) Fales teoremasi faqat burchak uchun o'rinlimi?
3) Uchburchakning bir tomoniga parallel to'g'ri chiziqning xossasini ayting.

111. Sirkul (pargar) va chizg'ich yordamida AB kesmani: 1) ikkita; 2) uchta; 3) oltita; 4) yettita teng bo'lakka bo'ling.

112. Berilgan: $AB = BD = 7$ sm, $BC \parallel DE$, $CE = 5$ sm (51- rasm).
Topish kerak: AC.

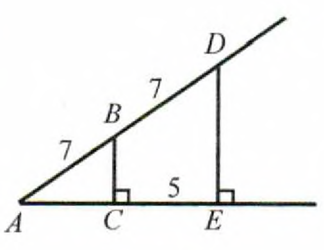
113. Berilgan: $\angle aOb$, $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3 \parallel A_4B_4$, $OA = AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$. $OB_4 = 8$ sm (52- rasm).
Topish kerak: OB_1, OB_2, OB_3.

114. $ABCD$ trapetsiyaning AB va CD tomonlari F nuqtada kesishguncha davom ettirilgan. Agar $FB : BA = 8 : 5$ va $FC - CD = 2{,}25$ m bo'lsa, CD tomonning uzunligini toping.

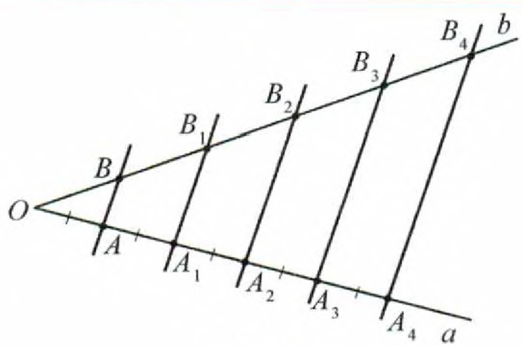
115. Agar burchakning har qaysi tomoniga ketma-ket teng uzunlikdagi kesmalar qo'yib chiqilsa va kesmalarning tegishli uchlari (burchak uchidan boshlab sanab) orqali to'g'ri chiziqlar o'tkazilsa, bu to'g'ri chiziqlar parallel bo'lishini isbotlang.

116. Berilgan: $\triangle ABC$, $D - AB$ ning o'rtasi va $DF \parallel BC$, $E - BC$ ning o'rtasi va $EP \parallel AB$.
Isbot qilish kerak: DF va EP to'g'ri chiziqlar ABC uchburchakni AC ga tegishli bir nuqtada kesadilar.

117. Sirkul (pargar) va chizg'ich yordamida AB kesmani: 1) to'rtta; 2) beshta teng bo'lakka bo'ling.



51- rasm.



52- rasm.

118. ABC burchakning tomonlarida to'rtta nuqta: K, L, M va N olingan (M va N nuqtasi burchakning bir tomonida). Agar $BM = MN$ va $BL = KL$ bo'lsa, LM va KN to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladimi?

119. $ABCD$ parallelogrammda M nuqta BC tomonning o'rtasi, N nuqta AD tomonning o'rtasi. BN va MD to'g'ri chiziqlar parallelogrammning AC diagonalini teng uchta bo'lakka bo'lishini isbot qiling.

120. ABC uchburchakning AB tomonida olingan D nuqtadan AC tomonga parallel DE kesma o'tkazilgan. $AD : DB = 5 : 6$, $BC = 22$ sm. BE kesmani toping.

12- mavzu. UCHBURCHAKNING O'RTA CHIZIG'I

Ta'rif. *Uchburchakning **o'rta chizig'i** deb uning ikki tomoni o'rtalarini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.*

ABC uchburchakda $AD = DB$ va $CE = EB$ bo'lsin, u holda DE o'rta chiziq bo'ladi (ta'rifga ko'ra). DE o'rta chiziqqa nisbatan AC tomon *asos* deb ataladi (53- rasm). Har qanday uchburchakda uchta o'rta chiziq bo'ladi (54- rasm).

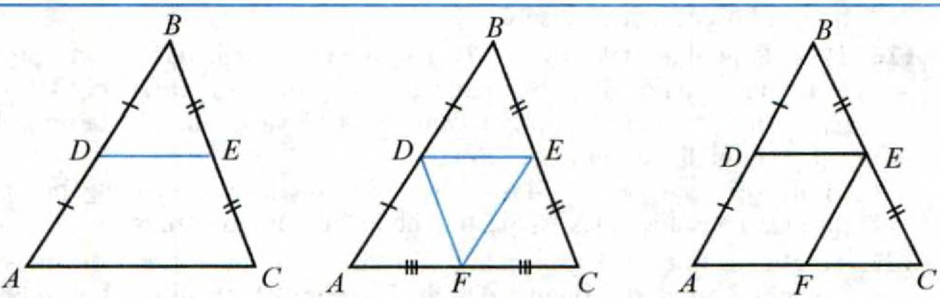
Teorema.

Uchburchakning o'rta chizig'i uning uchinchi tomoniga parallel, uning uzunligi esa bu tomon uzunligining yarmiga teng.

Berilgan: $\triangle ABC$ da: $AD = DB$ va $CE = EB$ (55- rasm).

Isbot qilish kerak: 1) $DE \parallel AC$; 2) $DE = \frac{1}{2} AC$.

Isbot. 1) D nuqta orqali AC tomonga parallel DE kesmani o'tkazamiz (55- rasm), ya'ni $DE \parallel AC$. Bu to'g'ri chiziq (Fales teoremasiga ko'ra)



53- rasm. 54- rasm. 55- rasm.

BC kesmani teng ikkiga bo'ladi: $CE = EB$, ya'ni E nuqta orqali o'tadi va o'rta chiziqni o'z ichiga oladi. Demak, DE o'rta chiziq AC tomonga parallel: $DE \parallel AC$ (yasashga ko'ra).

2) $EF \parallel AB$ ni o'tkazamiz. Fales teoremasiga ko'ra EF to'g'ri chiziq AC kesmani teng ikkiga bo'ladi: $AF = FC = \frac{1}{2}AC$. Biroq $ADEF$ parallelogrammda qarama-qarshi tomonlar bo'lgani uchun $AF = DE$.

$AF = FC = \frac{1}{2}AC$ va $AF = DE$ lardan: $AF = FC = DE = \frac{1}{2}AC$.

Demak, $DE = \frac{1}{2}AC$ ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Ushbu isbot qilingan teorema uchun teskari teorema ham o'rinlidir. Buni o'zingiz isbot qiling.

Savol, masala va topshiriqlar

121. 1) Uchburchakning o'rta chizig'i deb nimaga aytiladi?
2) Berilgan uchburchakda nechta o'rta chiziq yasash mumkin?
3) Uchburchakning o'rta chizig'i haqidagi teoremani ifodalang.

122. Uchburchakning tomonlari: 1) 4 sm, 6 sm va 8 sm; 2) 5 sm, 7 sm va 11 sm ga teng. Shu uchburchakning o'rta chiziqlarini toping.

123. Uchburchakning perimetri p ga teng. Uchlari berilgan uchburchak tomonlarining o'rtalarida bo'lgan uchburchakning perimetrini toping.

124. Uchburchak tomonlarining nisbatlari $6:8:10$ kabi, perimetri 120 sm. Uchlari berilgan uchburchak tomonlarining o'rtalarida bo'lgan uchburchakning perimetrini va tomonlarini toping.

125. Berilgan to'rtburchak diagonallarining uzunliklari m va n ga teng. Uchlari berilgan to'rtburchak tomonlarining o'rtalarida yotuvchi to'rtburchakning perimetrini toping. Agar $m = 6$ dm va $n = 10$ dm bo'lsa, bu perimetrni hisoblang.

126. 1) ABC uchburchakning A, B va C uchlari orqali qarshisida yotgan tomonlarga parallel qilib o'tkazilgan to'g'ri chiziqlardan hosil bo'lgan $A_1B_1C_1$ uchburchakning tomonlari A, B va C nuqtalarda teng ikkiga bo'linadi. Shuni isbot qiling.
2) $AB = 12$ sm, $BC = 24$ sm, $AC = 30$ sm deb, masalaning birinchi qismida ko'rsatilgandek yasalgan uchburchak tomonlarini toping.

127. To'g'ri to'rtburchakning ikkita qo'shni tomoni o'rtalarini tutashtiruvchi kesma diagonallaridan biriga parallel ekanini isbot qiling. Agar to'g'ri to'rtburchakning diagonali 12 sm ga teng bo'lsa, bu kesma uzunligini toping.

128. 1) Uchburchakning tomonlari o‘rtalari tutashtirilib, perimetri 50 sm ga teng uchburchak hosil qilindi. Berilgan uchburchakning perimetrini toping. Xulosa chiqaring.

2) Uchburchakning perimetri 14,5 sm ga teng. Undan o‘rta chiziqlaridan biri yordamida ajratib olingan uchburchakning perimetrini toping.

129. Kvadratning diagonali 14 sm ga teng. Berilgan kvadrat tomonlarining o‘rtalarini ketma-ket tutashtiruvchi kesmalar hosil qilgan to‘rtburchakning perimetrini toping.

13- mavzu. TRAPETSIYANING O‘RTA CHIZIG‘I

Ta’rif. *Trapetsiya yon tomonlari o‘rtasini tutashtiruchi kesma* ***trapetsiyaning o‘rta chizig‘i*** *deyiladi.*

Bizga $ABCD$ trapetsiya berilgan bo‘lib, unda AD va BC – trapetsiya asoslari; AB va DC uning yon tomonlari, E va F nuqtalar yon tomonlarining o‘rtalari bo‘lsin (56- rasm). Bunda EF – o‘rta chiziq bo‘ladi.

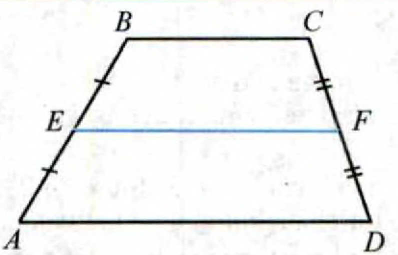
Teorema.

Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uning asoslariga parallel va uning uzunligi trapetsiya asoslari uzunliklari yig‘indisining yarmiga teng.

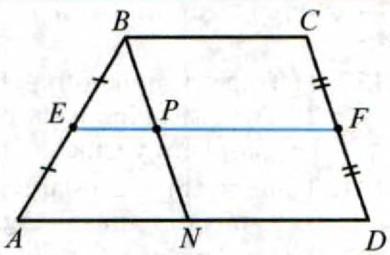
Isbot. *1-usul.* Teoremani isbot qilish uchun trapetsiyaning kichik asosi uchidan ikkinchi yon tomonga parallel BN to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (57- rasm). Bunda trapetsiya parallelogramm va uchburchakka ajraladi.

$BCDN$ parallelogrammda qarama-qarshi tomonlar bo‘lgani uchun $BC = ND$. $\triangle ABN$ da EP o‘rta chiziq bo‘ladi. Bundan $EP \parallel AN$ ekanini hosil qilamiz.

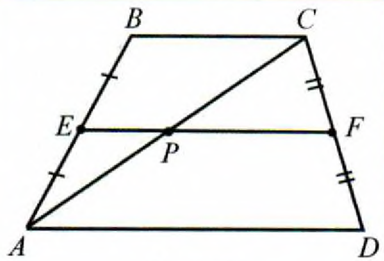
Uchburchak o‘rta chizig‘i xossasiga ko‘ra $EP = \frac{1}{2} AN$. Ammo $AN = AD - ND = AD - BC$.



56- rasm.



57- rasm.



58- rasm.

Trapetsiyaning o'rta chizig'i $EF = EP + PF$ yoki $EF = \frac{1}{2}AN + PF$, bu yerda $AN = AD - BC$ va $PF = BC$ ekanini nazarga olsak, $EF = \frac{AD - BC}{2} + BC = \frac{AD + BC}{2}$.

Demak, $EF = \frac{AD + BC}{2}$ ekan.

2-usul. Berilgan: $ABCD$ — trapetsiya. $AD \parallel BC$, $AE = EB$, $DF = FC$ (58- rasm).

Isbot qilish kerak: $EF \parallel AB$, $EF \parallel BC$, $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Isbot. 1) AB tomonning o'rtasi E nuqta orqali AD va BC kesmalarga parallel qilib EF to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq (Fales teoremasiga ko'ra) CD kesmaning o'rtasi, ya'ni F nuqta orqali o'tadi va EF to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushadi. Demak, trapetsiyaning o'rta chizig'i EF uning asoslariga parallel.

2) AC diagonalni o'tkazamiz va uning EF o'rta chiziq bilan kesishish nuqtasini P nuqta bilan belgilaymiz. Fales teoremasiga ko'ra P nuqta AC kesmaning o'rtasi bo'ladi. EP va PF kesmalar — ABC va ACD uchburchaklarning o'rta chiziqlari. Uchburchak o'rta chizig'ining xossasiga ko'ra:

$$EP = \frac{1}{2}BC, \quad PF = \frac{1}{2}AD.$$

U holda $EF = EP + PF = \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Demak, $EF \parallel AD \parallel BC$ va $EF = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Savol, masala va topshiriqlar

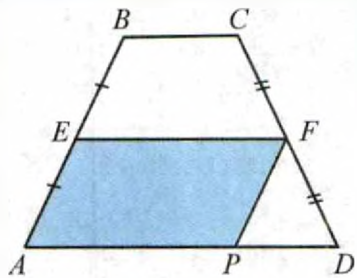
130. 1) Trapetsiyaning o'rta chizig'i deb nimaga aytiladi?
2) Trapetsiyaning o'rta chizig'i haqidagi teoremani ayting va undagi belgilashlarni yozing.

131. Trapetsiyaning asoslari: 1) 11 sm va 17 sm; 2) 4,5 dm va 8,2 dm; 3) 9 sm va 21 sm ga teng. Uning o'rta chizig'ining uzunligi qancha?

132. Trapetsiyaning o'rta chizig'i 16 sm ga, asoslaridan biri esa 12 sm ga teng. Trapetsiyaning ikkinchi asosi nimaga teng?

133. $ABCD$ trapetsiyaning yon tomoni AB ga parallel CP to‘g‘ri chiziq AD asosni: 1) $AP = 10$ sm va $PD = 8$ sm li; 2) $AP = 5$ sm va $PD = 7$ sm li kesmalarga ajratadi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

134. $EF - ABCD$ trapetsiyaning o‘rta chizig‘i. F nuqta orqali AB tomonga parallel va AD tomonni P nuqtada kesadigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan (59- rasm). $AEFP$ parallelogramm ekanini isbotlang.



59- rasm.

135. Teng yonli trapetsiyaning diagonallari o‘tkir burchagini teng ikkiga bo‘ladi. Trapetsiyaning perimetri 66 sm, asoslarining nisbati $2:5$ kabi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.

136. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uning balandligini teng ikkiga bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

137. $ABCD$ trapetsiyaning tomonlari ma'lum: $AB = 4$ sm, $BC = 6$ sm, $CD = 5$ sm, $AD = 10$ sm. Agar EF — trapetsiyaning o‘rta chizig‘i bo‘lsa, $AEFD$ trapetsiyaning tomonlari nimaga teng?

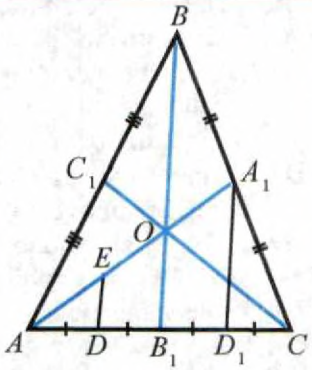
138. Trapetsiyaning katta asosi kichik asosidan 3 marta katta va uning o‘rta chizig‘i 20 sm ga teng. Trapetsiyaning asoslarini toping.

139. Trapetsiyaning katta asosi 16 sm ga teng, kichik asosi esa o‘rta chiziqdan 6 sm qisqa. Trapetsiyaning kichik asosini va o‘rta chizig‘ini toping.

14- mavzu. FALES TEOREMASI TATBIG‘IGA DOIR MASALALAR

1-masala. Har qanday uchburchakda medianalarning kesishgan nuqtasidan mos tomonigacha bo‘lgan qismi, butun medianadan uchdan bir bo‘lagiga teng. Shuni isbot qiling.

Yechish. Ixtiyoriy ABC uchburchakda AA_1, BB_1, CC_1 — medianalar va O ular kesishishgan nuqta bo‘lsin (60- rasm). A_1AC burchakdan foydalanib, AA_1 ni teng uch bo‘lakka bo‘lamiz. Buning uchun AC da $AD = \frac{AB_1}{2} = B_1D_1 = \frac{B_1C}{2}$ larni olib, $DE \parallel OB_1$ o‘tkazilsa

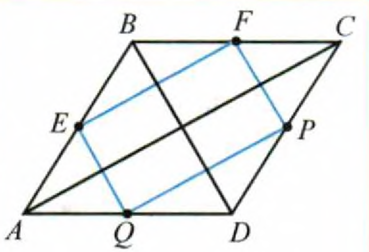


60- rasm.

va $D_1A_1 \parallel B_1B$, ya'ni $D_1A_1 \parallel OB_1$ ekanidan $DE \parallel OB_1 \parallel D_1A_1$ kelib chiqadi. Bundan, Fales teoremesiga ko'ra, $AE = EO = OA_1$. Demak, $AA_1 = AE +$ $+ EO + OA_1 = 3OA_1$, bundan, $OA_1 = \frac{1}{3}AA_1$ bo'ladi.

Shunga o'xshash: $OB_1 = \frac{1}{3}BB_1$, $OC_1 = \frac{1}{3}CC_1$.

2-masala. Romb tomonlarining o'rtalari to'g'ri to'rtburchakning uchlari ekanini isbotlang.



61-rasm.

Yechish. $ABCD$ rombning AC va BD diagonallarini o'tkazamiz (61-rasm). EF — ABC uchburchakning o'rta chizig'i bo'lgani uchun $EF \parallel AC$, $EF = \frac{1}{2}AC$, QP — ADC uchburchakning o'rta chizig'i, demak, $QP \parallel AC$, $QP = \frac{1}{2}AC$. Bulardan, $EF \parallel QP$ va $EF = QP$ ekani kelib chiqadi. Demak, $EFPQ$ to'rtburchak — parallelogramm. Rombning diagonallari o'zaro perpendikular va $EFPQ$ parallelogrammning istalgan qo'shni tomonlari rombning mos diagonallariga parallel, shuning uchun $EFPQ$ parallelogrammning burchaklari to'g'ri burchak bo'ladi.

Shunday qilib, $EFPQ$ — to'g'ri to'rtburchak ekan.

Savol, masala va topshiriqlar

140. Ucburchakning o'rta chizig'i uning balandligini teng ikkiga bo'lishini isbotlang.

141. Qavariq to'rtburchak tomonlarining o'rta nuqtalarini ketma-ket birlashtirilsa, parallelogramm hosil bo'ladi. Shuni isbot qiling.

142. Berilgan ucburchak tomonlarining o'rtalarini ketma-ket birlashtirishdan hosil bo'lgan uchburchakning perimetri berilgan uchburchakning perimetridan ikki marta kichik bo'ladi. Shuni isbotlang.

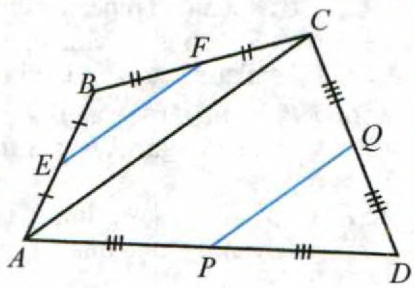
143. Trapetsiya asoslari orasidagi har qanday to'g'ri chiziq kesmasi trapetsiyaning o'rta chizig'i bilan teng ikkiga bo'linishini isbot qiling.

144. To'g'ri chiziqdan bir tomonda yotgan kesmaning uchlari undan 5 sm va 13 sm uzoqlikda. Kesmaning o'rtasi to'g'ri chiziqdan qancha masofada bo'ladi?

145. $ABCD$ to'rtburchakda $AB = BC$ va $CD = AD$. To'rtburchak tomonlarining o'rtalari birin-ketin tutashtirilgan. Hosil bo'lgan to'rtburchakning to'g'ri to'rtburchak ekanligini isbot qiling.

146. Trapetsiyaning diagonali uning o‘rta chizig‘ini 3 : 8 nisbatda ikki kesmaga ajratadi. O‘rta chiziq kesmalarining ayirmasi 15 sm ga teng. Trapetsiyaning asoslarini toping.

147. Ixtiyoriy to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalari 62- rasmda ko‘rsatilgandek birlashtirilgan. Bu kesmalar bilan kesishmaydigan diagonal 30 sm ga teng. Bu kesmalarning uzunliklarini toping.



62- rasm.

2- § ga doir qo‘shimcha mashqlar

148. C nuqta AB kesmani $m:n$ nisbatda bo‘ladi. $AC:AB$, $CB:AB$ nisbatlarni toping.

149. 12 sm uzunlikdagi AB kesmada C nuqta berilgan, undan A gacha bo‘lgan masofa 7,2 sm, AB kesmaning B nuqtadan uzaytirilgan davomida shunday D nuqtani topingki, ulardan A gacha bo‘lgan masofaning B gacha bo‘lgan masofasi nisbati $AC:CB$ bo‘lsin.

150. Ikkita KP va EC kesmalar berilgan. M va L nuqtalar mos ravishda KP va EC kesmalarda yotadi. KP, MP va EC, LC kesmalar proporsional. $KM \cdot LC = MP \cdot EL$ ekanini isbotlang.

151. Uchta kesma berilgan: $a = 3$ sm, $b = 6$ sm, $c = 9$ sm. To‘rtinchi d kesmaning miqdori qanday bo‘lganda, bu to‘rtta kesma proporsional bo‘ladi?

152. Uchburchak ichki burchagining bissektrisasi shu burchak qarshisidagi tomonni qolgan ikki tomon bilan proporsional bo‘laklarga bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

153. Teng yonli trapetsiyaning o‘rta chizig‘i balandligiga teng bo‘lsa, diagonallari o‘zaro perpendikular bo‘ladi. Shuni isbot qiling.

154. Teng yonli trapetsiyaning o‘tmas burchagi uchidan asosiga tushirilgan balandlik asosini ikki bo‘lakka ajratadi va katta bo‘lagi trapetsiyaning o‘rta chizig‘iga teng bo‘lishini isbotlang.

155. Trapetsiyaning yon tomoni to‘rtta teng bo‘lakka bo‘lingan va bo‘linish nuqtalari orqali trapetsiya asoslariga parallel to‘g‘ri chiziqlar o'tkazilgan. Trapetsiyaning asoslari 46 sm va 30 sm ga teng. Bu parallel to'g'ri chiziqlarning trapetsiya yon tomonlari orasidagi kesmalarining uzunligini toping.

156. KP bilan MN va DO bilan AL kesmalar bir-biriga proporsional kesmalar. Agar $KP = 8$ dm, $MN = 40$ sm, $DO = 1$ m bo'lsa, AL ni toping.

157. Trapetsiya asoslarining uzunliklari 56 sm va 24 sm ga teng. Trapetsiyaning diagonallari o'rtalarini tutashtiruvchi kesmaning uzunligini toping.

2- TEST

1. Uchburchakning o'rta chizig'i uning asosidan 5,4 sm qisqa. Uchburchakning o'rta chizig'i bilan asosining yig'indisini toping.

A) 13,5 sm; B) 16,2 sm; C) 10,8 sm; D) 21,6 sm.

2. Teng yonli trapetsiyaning perimetri 36 sm, o'rta chizig'i 10 sm. Yon tomonining uzunligini toping.

A) 10 sm; B) 8 sm; C) 12 sm; D) 13 sm.

3. Trapetsiyaning o'rta chizig'i 9 sm, asoslaridan biri ikkinchisidan 6 sm qisqa. Trapetsiyaning katta asosini toping.

A) 15 sm; B) 18 sm; C) 12 sm; D) 10 sm.

4. Trapetsiyaning kichik asosi 4 sm, o'rta chizig'i katta asosidan 4 sm qisqa. Trapetsiyaning o'rta chizig'ini toping.

A) 6 sm; B) 10 sm; C) 8 sm; D) 12 sm.

5. Teng yonli trapetsiyaning diagonali o'tkir burchagini teng ikkiga bo'ladi. Agar trapetsiyaning perimetri 48 sm ga, katta asosi 18 sm ga teng bo'lsa, uning o'rta chizig'ini toping.

A) 14 sm; B) 15 sm; C) 12 sm; D) 13 sm.

6. Asoslari 28 sm va 12 sm ga teng bo'lgan trapetsiyaning diagonallari o'rtalarini tutashtiruvchi kesmaning uzunligini toping.

A) 8 sm; B) 10 sm; C) 6 sm; D) 7 sm.

7. Trapetsiyaning diagonallari uning o'rta chizig'ini uchta teng bo'lakka ajratsa, katta asosining kichik asosga nisbatini toping.

A) 2 : 1; B) 3 : 1; C) 5 : 2; D) 7 : 3.

8. $ABCD$ trapetsiyaning o‘rta chizig‘i uni o‘rta chiziqlari 13 sm va 17 sm ga teng bo‘lgan ikkita trapetsiyaga ajratadi. Trapetsiyaning katta asosini toping.
A) 19 sm; B) 21 sm; C) 18 sm; D) 30 sm.

9. Teng yonli trapetsiyaning kichik asosi 3 ga, perimetri 42 ga teng. Uning diagonali o‘tmas burchakni teng ikkiga bo‘ladi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘ini toping.
A) 8; B) 12; C) 8,5; D) 10.

10. Trapetsiyaning diagonallari katta asosidagi burchaklarini teng ikkiga bo‘ladi. Trapetsiyaning o‘rta chizig‘i 11,7 ga, perimetri esa 36 sm teng. Trapetsiya katta asosining uzunligini toping.
A) 18; B) 17,6; C) 17,1; D) 16,3.

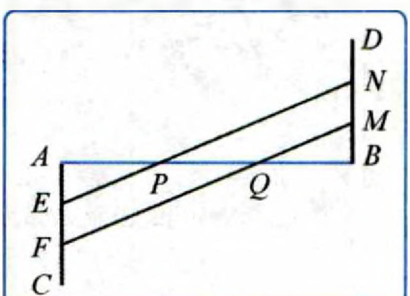
Tarixiy ma’lumotlar

Fales (miloddan avvalgi 640—548- y.) Gretsiyadagi Milet shahrida yashagan. U Misrga sayohat qilgan va u yerda turli fanlar bilan tanishgan. Falesni ko‘proq geometriya qiziqtirgan. U Ioniya maktabining asoschisi hisoblanadi. Fales maktabi faqat matematik fanlarni sistemalashtiribgina qolmay, balki Gretsiyada fanning rivojlanishiga katta ta’sir ham ko‘rsatdi.

Fales geometriyaga tegishli juda ko‘p kashfiyotlar qilgan. U geometriyaning bir necha teoremalarini isbotlagan, jumladan, yuqorida bayon qilingan teoremaning hamda teng yonli uchburchak asosidagi burchaklar tengligining isboti ham Falesga tegishli.

Fales geometrgina emas, u faylasuf, astronom ham edi. Fales astronomiyada ham anchagina yutuqlarga erishgan.

Shunga o‘xshash masalalar o‘rta asrlarda yashagan matematiklarning asarlarida ham ko‘p uchraydi. Masalan, **Abul Vafo**ning bir masalasida berilgan kesmani teng uch qismga bo‘lish talab qilinadi va u quyidagicha yechiladi. Berilgan AB kesmaning uchlaridan qarama-qarshi AC va BD perpendikularlar chiqariladi. AC nurda esa o‘zaro teng AE va EF kesmalar ajratiladi. BD nurda esa AE ga teng BM va EF ga teng MN kesmalar ajratiladi. So‘ngra E nuqta N bilan, F nuqta M bilan birlashtiriladi. AB kesmada hosil bo‘lgan P va Q nuqtalar uni teng uch bo‘lakka bo‘ladi. Uning isboti bilan 9- sinfda tanishasiz.



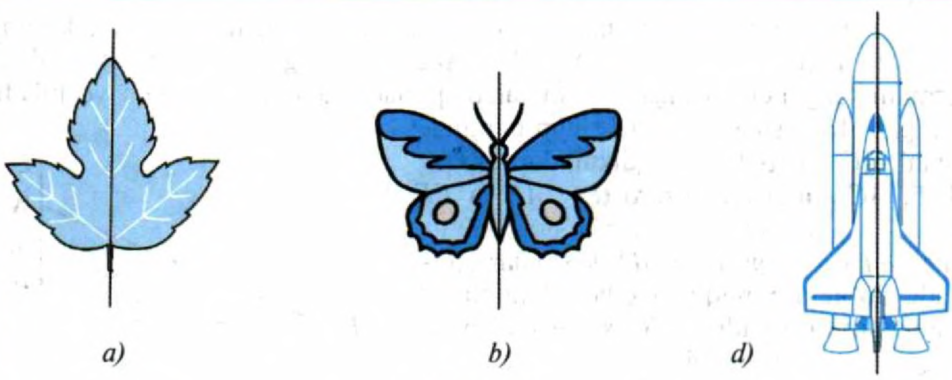
3- §. SIMMETRIYA

15- mavzu. O'QQA NISBATAN SIMMETRIYA

1. Simmetriya. Kundalik hayotda simmetriyaga juda ko'plab duch kelamiz. Daraxt barglari shakli, kapalak qanotlarining uning tanasiga nisbatan joylashuvi va inson a'zolarining tanaga nisbatan joylashuvi va hokazolar simmetriyaga yorqin misol bo'ladi.

Boshqa ko'pgina matematik tushunchalar singari, shakllarning simmetriyasi tushunchasi ham atrofni o'rab turgan dunyo (tabiat) obyektlarini kuzatish natijasida paydo bo'lgan. Masalan, o'simliklar va tirik organizmlar tasvirlarini ko'zdan kechirib (bu tasvirlarni tekis shakl deb hisoblash mumkin), ularning ko'plari yuqori darajadagi aniqlikda biror simmetriyaga ega ekaniga ishonch hosil qilish mumkin. Masalan, daraxt barglari (63- *a* rasm), kapalaklar (63- *b* rasm) va qor uchqunlari o'qqa nisbatan simmetriyaga egadir.

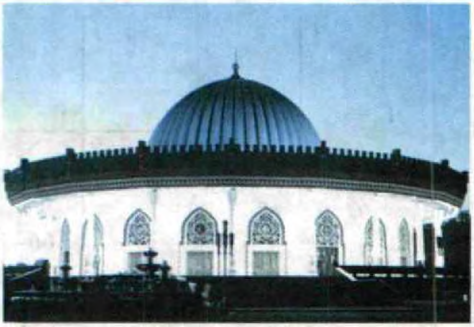
Simmetriya san'atda, texnikada (63-*d* rasm), turmushda ko'plab uchraydi. Masalan, ko'pgina binolarning old tomonlari va ustidan ko'rinishlari simmetrik bo'ladi. Gilamdagi naqshlar — gullar, jiyakdagi gullar, mexanizmlarning ko'pgina turlari, masalan, g'ildiraklar yoki shesternalar simmetrik bo'ladi.



a) *b)* *d)*

63- rasm.

64- rasm.



65- rasm.

Aytib o'tganimizdek, bunday simmetriyani har joyda ko'rishimiz mumkin. Masalan, yashayotgan joyingizdagi chiroyli qurilgan imorat, tosh yotqizilgan maydon yoki kafel bilan bezatilgan devorga ahamiyat bering.

Agar siz qadimiy me'morchilik obidalarini ko'zdan kechirsangiz, ularning chiroyi undagi shakllarning uyg'unligi hamda ma'lum qonuniyat asosida takrorlanishida namoyon bo'lishini sezishingiz mumkin. Vatanimizda bunday obidalar behisob. Ularning qadimiylaridan biri Mir Arab madrasasidir (64- rasm), zamonaviy binolardan biri esa Temuriylar tarixi davlat muzeyidir (65- rasm). Bunday simmetriyaga ega bo'lgan shakllar *simmetrik shakllar* deb ataladi. Bu simmetriyani hosil qiluvchi qonun esa *simmetriya* deb ataladi.

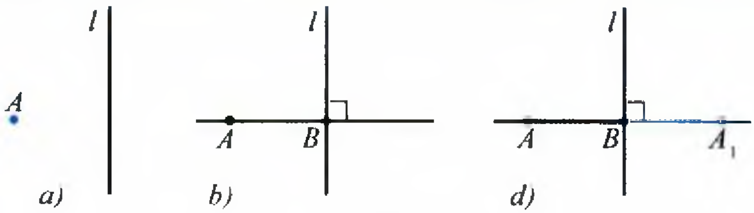
Simmetriya – geometriya fanining bir qismi bo'lib, uni to'la o'rganish uchun chuqur matematik bilimlarga ega bo'lish lozim. Biz esa uning boshlang'ich tushunchalari bo'lgan «O'qqa nisbatan simmetriya va markaziy simmetriya» bilan tanishamiz.

2. O'qqa nisbatan simmetriya va uning xossasi.

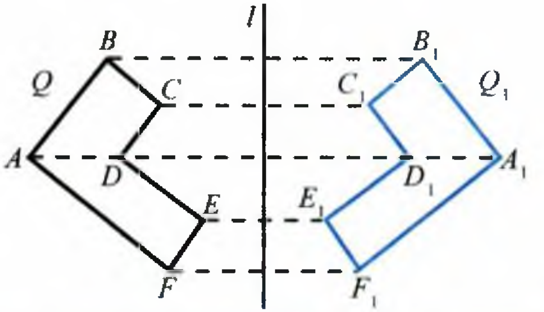
l to'g'ri chiziq bo'ylab magistral gaz quvuri o'tgan. A va B qishloqlariga gaz taqsimlaydigan stansiya uchun C joyni to'g'ri chiziqning qayerida tanlansa, stansiyadan bu qishloqlargacha yotqiziladigan gaz quvuri xarajatlari arzonga tushadi va uning uzunligi eng qisqa bo'ladi? ($AC + CB$ masofa eng qisqa bo'lishi uchun C ni qanday tanlash kerak?)

– Siz qishloqlar magistral gaz quvuriga nisbatan: 1) turli tomonda; 2) bir tomonda joylashgan holda quruvchilarga qanday maslahat berasiz?

2.1. O'qqa nisbatan simmetriya. Bizga tekislikda l to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin (66- rasm). Ma'lumki, l to'g'ri chiziq tekislikni ikki yarim tekislikka ajratadi. Yarim tekisliklarning birida A nuqta olaylik va u nuqtadan l to'g'ri chiziqqa perpendikular AB to'g'ri chiziqni o'tkazaylik. Bunda $B \in l$. So'ngra



66- rasm.



67- rasm.

AB to‘g‘ri chiziqning ikkinchi yarim tekisligidagi bo‘lagida AB kesmaga teng BA_1 kesma qo‘yamiz. Hosil qilingan A_1 nuqta, A nuqtaga *l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqta* deyiladi. l to‘g‘ri chiziq esa *simmetriya o‘qi* deb ataladi. Simmetriya o‘qida yotgan nuqtalar o‘z-o‘ziga *simmetrik nuqtalar* deb qaraladi. Biz ko‘rgan holda B nuqtaga simmetrik nuqta shu B nuqtaning o‘zidir.

Endi biror Q shaklni qaraylik (67- rasm). Shakl nuqtalardan tashkil topgan bo‘ladi.

Ta'rif. *Agar Q_1 shaklning har bir nuqtasi biror l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan Q shaklning nuqtalariga simmetrik bo‘lsa, bunday shakllar l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan **simmetrik shakllar** deb ataladi, l esa **simmetriya o‘qi** deyiladi.*

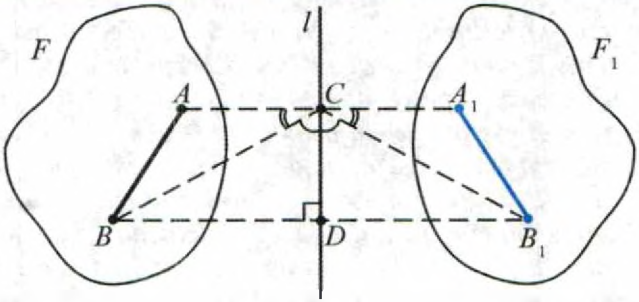
O‘zaro simmetrik shakllardan biri ikkinchisining simmetrik *aksi* deb nomlanadi. Albatta, agar Q shakl Q_1 shaklning simmetrik aksi bo‘lsa, Q_1 shakl ham Q shaklning simmetrik aksi bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik ikkita geometrik shakl o‘zaro tengdir.

2.2. O‘qqa nisbatan simmetriyaning xossasi.

Teorema.

Shakl o‘qqa nisbatan simmetrik akslantirilganda uning nuqtalari orasidagi masofa o‘zgarmaydi, ya’ni saqlanadi.



68- rasm.

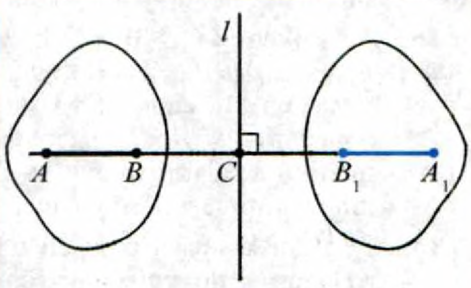
I s b o t . F shaklning l o'qqa nisbatan simmetrik aksi F_1 bo'lsin (68- rasm). F shaklning ixtiyoriy A va B nuqtalarini olaylik. Ularga simmetrik bo'lgan nuqtalarni mos ravishda A_1 va B_1 bilan belgilaymiz.

$AB = A_1B_1$ ekanini isbot qilishimiz kerak. Isbot qilish uchun AA_1 kesmani l o'qi bilan kesishgan nuqtasini C bilan, BB_1 ning l o'qi bilan kesishgan nuqtasini D bilan belgilaymiz. So'ngra C nuqtani B va B_1 bilan tutashtiruvchi CB va CB_1 kesmalarni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan BDC va B_1DC to'g'ri burchakli uchburchaklar o'zaro teng, chunki ularda CD katet umumiy hamda B va B_1 – simmetrik nuqtalar bo'lgani uchun $BD = DB_1$. Bundan $CB = CB_1$ va $\angle BCD = \angle B_1CD$ kelib chiqadi.

Endi ABC va A_1B_1C uchburchaklarni solishtiramiz. Bularda $AC = A_1C$, chunki A_1 nuqta A ga simmetrik. Yuqorida $CB = CB_1$ ekanini isbot qildik.

$\angle BCA = \angle B_1CA_1$, chunki ular o'zaro teng bo'lgan burchaklarni 90° ga to'ldiruvchi burchaklar, ya'ni $\angle BCA = 90° - \angle BCD$ va $\angle B_1CA_1 = 90° - \angle B_1CD$. Demak, qaralayotgan ABC va A_1B_1C uchburchaklarda mos ikki tomon va ular orasidagi burchak teng ekan. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra bu uchburchaklar teng. Bundan $AB = A_1B_1$ ekani kelib chiqadi.

Ma'lumki, A va B nuqtalarni ixtiyoriy oldik. Shunday hol bo'lishi mumkinki, A, B, A_1 va B_1 nuqtalar bir to'g'ri chiziqda yotib qoladi. U holda ham teorema isboti simmetriya xossasidan oddiygina hosil qilinadi (69- rasm). Haqiqatan ham, $AC = A_1C$ va $BC = B_1C$ ekani ravshan. Shuning uchun $AB = AC - BC$ va $A_1B_1 = A_1C - B_1C$, bundan $AB = A_1B_1$ kelib chiqadi.



69- rasm.

Demak, A va B nuqtalar F shaklning ixtiyoriy nuqtalari bo'lgan hol uchun teorema isbot qilindi.

1. *O‘qqa nisbatan simmetriyada kesmaning uzunligi o‘zgarmaydi, shaklning joylashishi esa o‘qqa nisbatan simmetrik bo‘ladi.*
2. *Simmetriyada to‘g‘ri chiziqlar to‘g‘ri chiziqlarga o‘tadi, bunda simmetriya o‘qiga perpendikular to‘g‘ri chiziqlar o‘z-o‘ziga o‘tadi, simmetriya o‘qi esa o‘z joyida qoladi.*
3. *Ox (abssissalar) o‘qiga nisbatan simmetriyada nuqtaning abssissasi o‘zgarmaydi, ordinatasi esa qarama-qarshisiga o‘zgaradi.*
4. *Oy (ordinatalar) o‘qiga nisbatan simmetriyada nuqtaning ordinatasi o‘zgarmaydi, abssissasi esa qarama-qarshisiga o‘zgaradi.*
5. *O‘qlarda yotgan nuqtaning koordinatalari o‘zgarmaydi.*

Savol, masala va topshiriqlar

158. 1) Qanday nuqtalar berilgan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik nuqtalar deyiladi?

2) Qanday shakl berilgan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik shakl bo‘ladi?

159. l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada X nuqta X_1 nuqtaga o‘tadi. Shu simmetriyada Y o‘tadigan nuqtani yasang.

160. 1) A nuqta l o‘qqa nisbatan A_1 nuqtaga simmetrik, A_1 nuqta shu o‘qqa nisbatan A nuqtaga simmetrik deyish to‘g‘rimi?

2) F shakl l o‘qqa nisbatan F_1 shaklga simmetrik, F_1 shakl shu o‘qqa nisbatan F shaklga simmetrik deyish to‘g‘rimi?

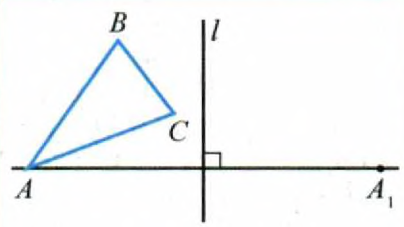
161. 70- rasmda ABC uchburchak va l to‘g‘ri chiziq tasvirlangan. l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan ABC uchburchakka simmetrik bo‘lgan $A_1B_1C_1$ uchburchakni yasang.

162. $ABCD$ trapetsiya ($AB \parallel CD$) berilgan. U: 1) CD to‘g‘ri chiziqqa; 2) AD to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada o‘tgan shaklni yasang.

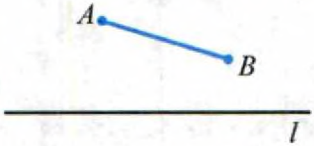
163. $A(a;\ b)$ nuqta berilgan. Koordinata o‘qlariga nisbatan A nuqtaga simmetrik nuqta qanday koordinatalarga ega bo‘ladi?

164. Tekislikda $A(4;\ 3)$, $B(3;\ -2)$, $C(-2;\ 2)$ va $D(-1;\ -1)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalarga koordinata o‘qlariga nisbatan simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

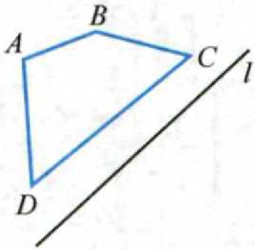
165. Berilgan kesmaga berilgan o‘qqa nisbatan simmetrik kesmani yasang (71- rasm).



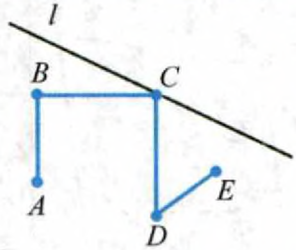
70- rasm.



71- rasm.



72- rasm.



73- rasm.

166. Berilgan to'rtburchakka berilgan o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan to'rtburchakni yasang (72- rasm).

167. *ABCDE* siniq chiziqqa berilgan *l* o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan siniq chiziqni yasang (73- rasm).

168. *l* to'g'ri chiziq va uning turli tomonida yotuvchi *A* va *B* nuqtalar berilgan. *l* to'g'ri chiziqda shunday bir *C* nuqtani topingki, *AC* va *CB* kesmalarning yig'indisi eng qisqa bo'lsin.

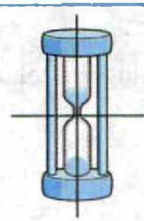
169. Berilgan burchakka berilgan o'qqa nisbatan simmetrik bo'lgan burchak yasang.

170. Tekislikda $A(-1; -5)$ va $B(3; 4)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalarga koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

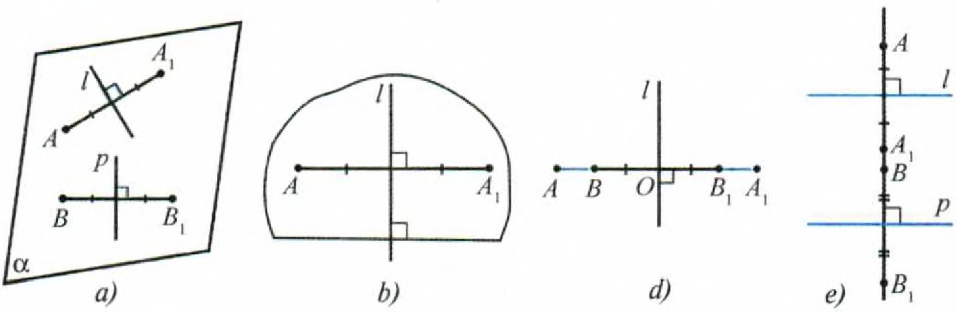
171. *ABCD* kvadrat berilgan. *AC* to'g'ri chiziqqa nisbatan *B* nuqtaga simmetrik nuqtani yasang.

172. Koordinata o'qlariga nisbatan $A(-4; 4)$ nuqtaga simmetrik A_1 va A_2 nuqtani yasang va uning koordinatalarini yozing.

16- mavzu. SIMMETRIYA O'QI



— *Tasvirlangan buyumlarda qanday umumiylik bor?*
— *Agar payqagan bo'lsangiz, uni tushuntirishga harakat qiling.*



74- rasm.

Shakl biror l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan o‘ziga-o‘zi simmetrik bo‘lishi mumkin. Bu degani, uning har bir X nuqtasiga l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik X_1 nuqta uning o‘zida yotadi. U holda l to‘g‘ri chiziq *shaklning simmetriya o‘qi* deyiladi, shaklni esa *o‘q simmetriyasiga* ega deyiladi.

O‘q simmetriyasiga ega bo‘lgan shakllarga misollar keltiramiz.

Masalan, 1) tekislik shu tekislikda yotgan har qanday to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik (74-*a* rasm); yarim tekislik uning chegarasiga perpendikular bo‘lgan har qanday to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik (74-*b* rasm); kesma o‘zining o‘rta perpendikulariga nisbatan simmetrik (74-*d* rasm); to‘g‘ri chiziq unga perpendikular bo‘lgan ixtiyoriy to‘g‘ri chiziqqa simmetrik (74-*e* rasm). Ushbu rasmlardan bu tasdiqlarning to‘g‘riligini ko‘rish qiyin emas.

Simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan shaklni quyidagicha yasash mumkin: bir varaq qog‘ozni buklab, unga biror shakl (naqsh, qul, ...) chizing va uni shaklning chegaralari bo‘ylab qirqing. Varaqni ochsangiz, buklash chizig‘iga nisbatan simmetrik shaklni hosil qilamiz. Buklash chizig‘i Siz chizgan shaklning simmetriya o‘qi bo‘ladi.

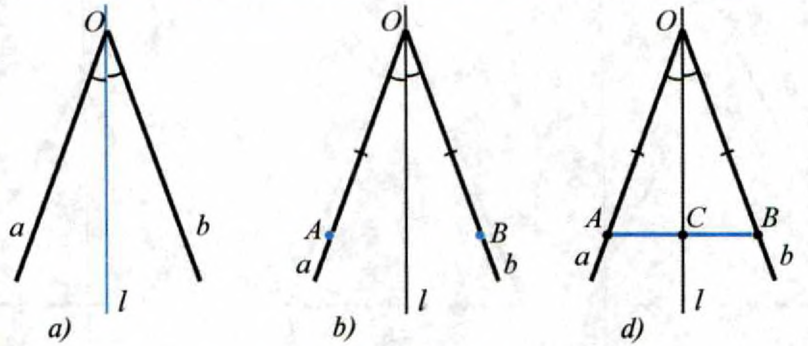
Shakl bitta, ikkita, uchta, ..., cheksiz ko‘p simmetriya o‘qiga ega bo‘lishi mumkin.

Teorema.

Burchakning bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq shu burchakning simmetriya o‘qidir.

Isbot. 1-usul. 1) O uchli yoyiq bo‘lmagan ab burchak uchun a va b tomonlarning shu burchak bissektrisasi yotgan l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrikligini isbotlaymiz (75- *a* rasm).

1-qadam. a nurda ixtiyoriy A nuqta olamiz. So‘ngra b nurda B nuqtani shunday yasaymizki, unda $OB = OA$ (75- *b* rasm).



75- rasm.

2- q a d a m . AB kesmani o‘tkazamiz. U l to‘g‘ri chiziqni biror C nuqtada kesadi (75- d rasm).

3- q a d a m . OC kesma teng yonli OAB uchburchakning AB asosiga o‘tkazilgan bissektrisasi va shu bilan bir qatorda, bu bissektrisa OAB uchburchakning ham medianasi, ham balandligi bo‘ladi (chunki OAC va OBC uchburchaklar uchburchaklar tengligining 1- alomatiga ko‘ra teng). Shuning uchun OC to‘g‘ri chiziq AB kesmaning o‘rta perpendikulari, ya’ni A va B nuqtalar l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik. ab burchak tomonlari uning bissektrisasi yotadigan to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik. Demak, burchakning o‘zi ham shu to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetrik ekan.

Shunday qilib, *burchak bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq shu burchakning simmetriya o‘qi bo‘ladi.*

2) Yoyiq burchak uchun bu tasdiqning to‘g‘riligi 74-d rasmda ko‘rsatilgan.

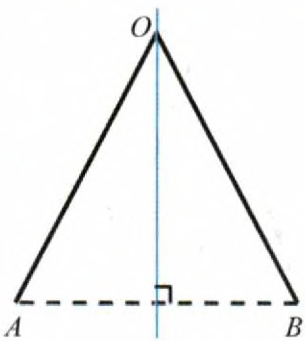
2- u s u l . aOb burchakning bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq l bo‘lsin (75-a rasmga qarang). l to‘g‘ri chiziqli simmetriyani ko‘rib chiqamiz.

Bu simmetriyada l nur o‘ziga akslanadi, aOl burchak esa l tomonli va aOl burchakka teng burchakka akslanadi. Ammo $\angle aOl = \angle bOl$ (shartga ko‘ra l nur aOb burchakning bissektrisasi). Har qanday nurga berilgan kattalikdagi ikkita burchakni qo‘yish mumkin. Shuning uchun l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmeriyada a nurning aksi b nur, b nurning aksi esa a nurdir. Demak, l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada aOb burchak o‘ziga akslanadi.

Burchakning bissektrisasini yasash berilgan burchakning simmetriya o‘qini yasashga keltiriladi, buni yuqoridagi teorema yordamida asoslash mumkin (76- rasm).

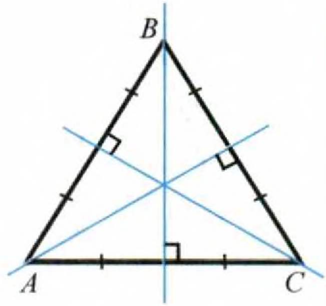
N a t i j a . *Teng yonli uchburchak uchidagi burchak bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziq shu uchburchakning simmetriya o‘qidir.*

I s b o t . ABC teng yonli uchburchak B burchagining bissektrisasi yotgan to‘g‘ri chiziqni l bilan belgilaymiz (77- rasm). Yuqorida isbotlangan teore-



76- rasm.

77- rasm.



78- rasm.

madan foydalanib, l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada BA nurning aksi BC nur, BC nurning aksi esa BA nur ekanini aniqlaymiz. Shartga ko‘ra, $AB = CB$. Shu l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada A nuqta C nuqtaga, C nuqta esa A nuqtaga o‘tadi.

Bundan tashqari, o‘qqa nisbatan simmetriyaning ta’rifiga ko‘ra B o‘ziga-o‘zi akslanadi. Demak, l to‘g‘ri chiziqqa nisbatan simmetriyada ABC teng yonli uchburchak o‘ziga akslanadi.

Teng tomonli uchburchakning bir nuqtadan o‘tuvchi uchta simmetriya o‘qi bor (78- rasm).

Savol, masala va topshiriqlar

173. 1) Shaklning simmetriya o‘qi nima?

2) Simmetriya o‘qiga ega bo‘lgan jismlarga, shakllarga misollar keltiring. Shakl nechta simmetriya o‘qiga ega bo‘lishi mumkin?

3) Berilgan burchakning bissektrisasi sirkul va chizg‘ich yordamida qanday yasaladi?

174. 1) Kvadrat bo‘lmagan rombning; 2) kvadratning; 3) nurning; 4) teng yonli uchburchakning nechta simmetriya o‘qi bor?

175. Teng yonli uchburchakning uchidan o‘tkazilgan balandligi (simmetriya o‘qi) undan perimetri 36 sm ga teng uchburchak kesadi. Agar berilgan teng yonli uchburchakning perimetri: 1) 48 sm ga; 2) 60 sm ga; 3) 40 sm ga teng bo‘lsa, balandligining uzunligini hisoblang.

176. 1) Berilgan ikki nuqtaning nechta simmetriya o‘qi bor?

2) Kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziqning nechta simmetriya o‘qi bor?

177. To‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari kesishish nuqtasidan uning tomonlariga parallel ravishda o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar shu to‘g‘ri to‘rtburchakning simmetriya o‘qlari bo‘lishini isbot qiling.

178. Romb diagonallari uning simmetriya o‘qlari bo‘lishini isbotlang.

179. Agar uchburchakning simmetriya o‘qi mavjud bo‘lsa: 1) u uchburchak uchlarining biridan o‘tishini; 2) uchburchak teng yonli bo‘lishini isbot qiling.

180. Teng yonli uchburchak ikki tomonining uzunligi: 1) 6 sm va 14 sm; 2) 10 sm va 5 sm; 3) 21 sm va 24 sm bo‘lsa, asosi va yon tomonining uzunliklarini toping.

181. Ushbu lotin alifbosidagi bosma harflardan qaysilari simmetriya o‘qiga ega: A, B, D, E, F, H, I, K, M, N, T, U, V, X, Y, Z, W?

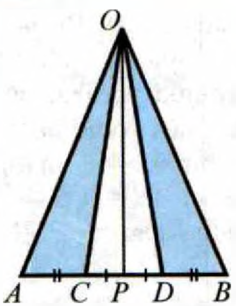
182. 79- rasmda: 1) ODB va OCA uchburchaklarning tengligini isbotlang; 2) teng kesmalar juftlarini, teng burchaklar juftlarini toping;

3) qaysi: nuqtalar, kesmalar va uchburchaklar OP dan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa (o‘qqa) nisbatan simmetrik bo‘ladi?

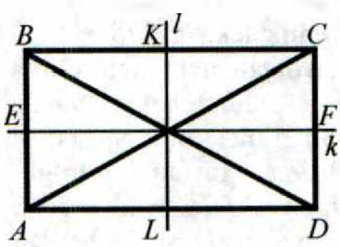
183. Aylananing markazidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar uning simmetriya o‘qi bo‘lishini isbot qiling.

184. k va l to‘g‘ri chiziqlar $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchakning simmetriya o‘qlari (80- rasm). $EF = 20$ sm va $KL = 15$ sm bo‘lsa, $EBCF$ va $ABCD$ to‘rtburchaklarning perimetrlarini toping.

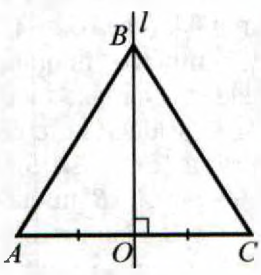
185. l to‘g‘ri chiziq ABC uchburchakning simmetriya o‘qi (81- rasm). Uchburchakning perimetri 46 sm. $AO = 6,5$ sm bo‘lsa, shu uchburchakning AC va BC tomonlarini toping.



79- rasm.



80- rasm.



81- rasm.

17- mavzu.

MARKAZIY SIMMETRIYA VA UNING XOSSALARI

1. Nuqtaga nisbatan (markaziy) simmetriya. Tekislikda O nuqtadan o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziqni qaraylik (82- rasm). To‘g‘ri chiziqdagi A va A_1 nuqtalar uchun $AO = OA_1$ shart bajarilsa, ya’ni A va A_1 nuqtalar O nuqtadan teng uzoqlikda bo‘lsa, A_1 nuqta A nuqtaning O nuqtaga nisbatan *simmetrik nuqtasi* deb ataladi. Buning aksi ham to‘g‘ri, ya’ni A_1 nuqta A ning simmetrik nuqtasi. Bunda O nuqta *simmetriya markazi* deb ataladi.

82- rasm.

Ta’rif. *Agar F_1 shaklning har bir nuqtasi F shaklning mos nuqtalarining O nuqtaga nisbatan* ***simmetrik nuqtasi*** *bo‘lsa, F va F_1 shakllar O nuqtaga nisbatan* ***markaziy simmetrik shakllar*** *deb ataladi.*

O nuqta F va F_1 shakllarning *simmetriya markazi* deb ataladi.

2. Markaziy simmetriyaning xossalari.

1- teorema.

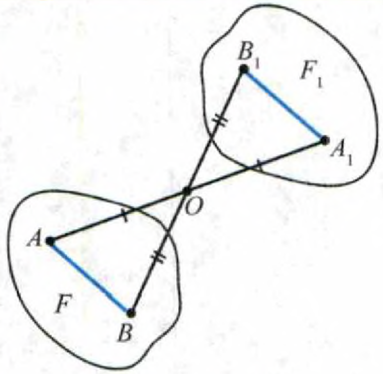
Nuqtaga nisbatan simmetrik shakllarda mos nuqtalar orasidagi masofalar teng.

Isbot. F va F_1 markaziy simmetrik shakllar bo‘lib, A va B nuqtalar F shaklning ixtiyoriy nuqtasi hamda A_1 va B_1 nuqtalar F_1 shaklning A va B ga mos kelgan simmetrik nuqtalari bo‘lsin (83- rasm). $AB = A_1B_1$ ekanini isbot qilish kerak.

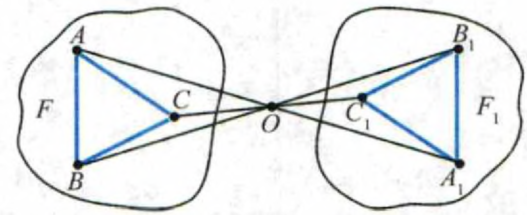
Isbot qilish uchun ABO va A_1B_1O uchburchaklarni taqqoslaymiz. Bu uchburchaklarda $AO = A_1O$ va $BO = B_1O$, chunki A, B va A_1, B_1 nuqtalar markaziy simmetrik nuqtalar. Shuningdek, $\angle AOB = \angle A_1OB_1$, chunki vertikal burchaklar. Demak, taqqoslanayotgan uchburchaklarda ikkita mos tomonlar va ular orasidagi burchak teng. Uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko‘ra: $\triangle ABO = \triangle A_1B_1O$. Bundan mos tomonlar bo‘lgani uchun $AB = A_1B_1$.

Agar A, B nuqtalar O dan o‘tuvchi bir to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lsa, $AB = A_1B_1$ ekani markaziy simmetriya ta’rifidan kelib chiqadi.

F va unga simmetrik bo‘lgan F_1 shakl berilgan bo‘lsin (84- rasm). Bu shakllarga tegishli uchta A, B, C va ularning aksi bo‘lgan A_1, B_1, C_1 nuqtalarni qaraylik. Bu nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotmasin. U holda $\triangle ABC$ va $\triangle A_1B_1C_1$ lar



83- rasm.



84- rasm.

mos tomonlarining uzunliklari teng (yuqorida isbot qilingan teoremaga ko'ra). Uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Bundan uchburchaklarning burchaklari ham teng ekani kelib chiqadi.

1-teorema.

Nuqtaga nisbatan simmetriyada kesmalar orasidagi burchak saqlanadi.

Xuddi shunga o'xshash teoremani o'qqa nisbatan simmetrik shakllar uchun ham ko'rsatish mumkin.

Savol, masala va topshiriqlar

186. 1) Nuqtaga nisbatan simmetriya deganda nimani tushunasiz?
2) Qanday shakl nuqtaga nisbatan simmetrik shakl deb ataladi? Simmetriya markazi nima?

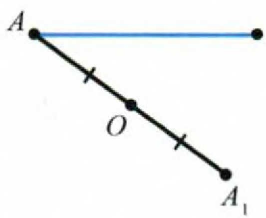
187. 1) A va B nuqtalar berilgan. A nuqtaga nisbatan B nuqtaga simmetrik bo'lgan B_1 nuqtani yasang.
2) Shu masalani faqat sirkuldan foydalanib yeching.

188. ABC uchburchak berilgan. A va B nuqtaga nisbatan C nuqtaga simmetrik bo'lgan shaklni yasang.

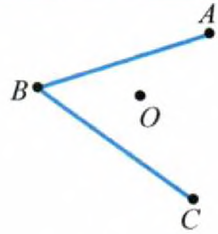
189. Biror O nuqtaga nisbatan simmetriyada X nuqta X_1 nuqtaga o'tadi. Shu simmetriyada Y o'tadigan nuqtani yasang.

190. Koordinatalar boshiga nisbatan $B(a;\ b)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtaning koordinatalari qanday? Xulosa chiqaring.

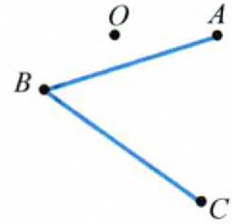
191. $A(-2;\ 2)$ va $B(2;\ -1)$ nuqtalar berilgan. 1) Koordinatalar boshiga nisbatan berilgan nuqtalarga simmetrik A_1 va B_1 nuqtalarni yasang.
2) A_1 va B_1 nuqtalarning koordinatalarini yozing.



85- rasm.



86- rasm.



87- rasm.

192. 85- rasmda AB kesma va O nuqta tasvirlangan. O nuqtaga nisbatan AB kesmaga simmetrik bo'lgan A_1B_1 kesmani yasang.

Yechish. AO to'g'ri chiziqni o'tkazamiz va unda A_1 nuqtani shunday belgilaymizki, unda O nuqta AA_1 kesmaning ... (82- rasmga q.) bo'lsin. A_1 nuqta O nuqtaga nisbatan A nuqtaga ... . Shunga o'xshash, ... nisbatan B nuqtaga ... bo'lgan B_1 nuqta yasaymiz. A_1B_1 — izlanayotgan kesma.

193. $A(-1; -4)$ va $B(3; 2)$ nuqtalar berilgan. 1) Abssissalar o'qiga; 2) ordinatalar o'qiga; 3) koordinatalar boshiga; 4) I va III koordinatalar burchaklari bissektrisalariga nisbatan berilgan nuqtalarga simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

194. ABC burchak va bu burchakning tomonlarida yotmagan O nuqta berilgan (86- rasm). Berilgan burchakka O nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan shaklni yasang.

195. ABC uchburchak AC tomonining o'rtasiga nisbatan simmertiyada B uchi D nuqtaga o'tadi. $ABCD$ to'rtburchak — parallelogramm ekanini isbotlang.

196. 1) Markaziy simmetriyada qaysi ikki raqam bir-biriga o'tadi?
2) Kesma, nur va to'g'ri chiziqlardan qaysilari simmetriya markaziga ega?

197. ABC burchak va bu burchakning tomonlarida yotmagan O nuqta berilgan (87- rasm). O nuqtaga nisbatan ABC burchakka simmetrik bo'lgan shaklni yasang.

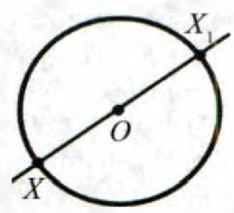
198. $A(1; 1)$, $B(-2; 0)$, $C(2; 3)$, $D(0; 1)$, $E(-3; 4)$ va $F(-2; -2)$ nuqtalar berilgan. 1) Abssissalar o'qiga; 2) ordinatalar o'qiga; 3) koordinatalar boshi $O(0; 0)$ nuqtaga nisbatan berilgan nuqtalarga simmetrik nuqtalarni yasang va ularning koordinatalarini yozing.

199. $A(3; 5)$, $B(4; 2)$, $C(3; -5)$, $D(-4; -2)$ va $E(-3; 5)$ nuqtalardan qaysi juftlari: 1) abssissalar o'qiga; 2) ordinatalar o'qiga; 3) koordinatalar boshi $O(0; 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ladi?

18- mavzu. MARKAZIY SIMMETRIK SHAKLLAR

Biror O markazga nisbatan simmetriyada o'ziga-o'zi akslanadigan shakl *markaziy simmetrik shakl* deyiladi (bu shakl *simmetriya markaziga ega* deb ham aytiladi). O nuqta esa shaklning *simmetriya markazi* deyiladi.

Aylana o'zining markaziga nisbatan simmetrik.



88- rasm.

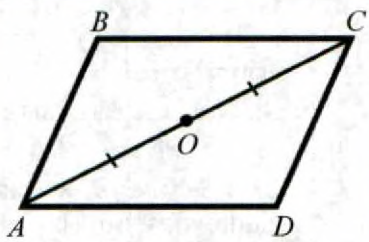
Haqiqatan ham, O markazli aylanada yotgan ixtiyoriy X nuqta olaylik. X nuqtadan O nuqta orqali aylananing XX_1 diametrini o'tkazamiz. O markaz XX_1 kesmaning o'rtasi, ya'ni X va X_1 nuqtalar O nuqtaga nisbatan simmetrik. Demak, O nuqta aylananing simmetriya markazi bo'ladi (88- rasm).

Uchburchak simmetriya markaziga ega emas, to'rtburchak esa simmetriya markaziga ega bo'lishi mumkin.

Teorema.

Parallelogramm diagonalining o'rtasi uning simmetriya markazidir.

I s b o t. O nuqta $ABCD$ parallelogramm diagonalining o'rtasi bo'lsin (89- rasm).



89- rasm.

O markazli simmetriyada AB kesma unga parallel bo'lgan va C nuqtadan o'tadigan to'g'ri chiziqqa, ya'ni CD to'g'ri chiziqqa akslanadi (parallelogramm ta'rifiga ko'ra $AB \parallel DC$). Bunday simmetriyada CB to'g'ri chiziq AD to'g'ri chiziqqa akslanadi.

Demak, O markazli simmetriyada AB va CD to'g'ri chiziqlarning akslari mos ravishda CD va AB to'g'ri chiziqlar bo'ladi. B nuqta AB va CB to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi. Shuning uchun O markazli simmetriyada uning aksi AB va CB to'g'ri chiziqlar akslarining kesishish nuqtasi, ya'ni D nuqta bo'ladi. Demak, B va D nuqtalar O markazga nisbatan simmetrikdir.

Shunday qilib, O markazli simmetriyada parallelogrammning A, B, C va D uchlari mos ravishda C, D, A va B uchlarga, ya'ni A uchi C uchga, B uchi D uchga, C uchi A uchga, D uchi B uchga akslanadi.

Demak, $ABCD$ parallelogramm ham O markazli simmetriyada o‘ziga akslanadi, binobarin, parallelogramm diagonalining o‘rtasi (O nuqta) bu parallelogrammning simmetriya markazi bo‘ladi.

Natija. *Parallelogramm diagonallari ularning kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi.*

Isbot. A va C (shuningdek, B va D) uchlar O nuqtaga nisbatan markaziy simmetrik.

Demak, AO va CO, BO va DO kesmalar teng, ya’ni O nuqta AC va BD diagonallarni teng ikkiga bo‘ladi.

Savol, masala va topshiriqlar

200. 1) Qanday shakl markaziy simmetrik shakl deyiladi? Markaziy simmetrik shakllarga misollar keltiring.
2) Shaklning simmetriya markazi nima?

201. Markaziy simmetriyada: 1) tekislikning qanday nuqtasi; 2) qanday to‘g‘ri chiziqlar o‘ziga akslanadi?

202. O nuqtaga nisbatan simmetriyada AB to‘g‘ri chiziqning obrazi qanday shakl bo‘ladi (O nuqta AB da yotadi)?

203. 1) Ikkita teng va parallel kesmalar berilgan. Ularning simmetriya markazini yasang.
2) Kesishuvchi ikki to‘g‘ri chiziq simmetriya markaziga egami?

204. Uchta to‘g‘ri chiziqdan ikkitasi o‘zaro parallel va uchinchisi esa ularni kesadi. Ulardan hosil bo‘lgan shakl simmetriya markaziga egami?

205. A_1B_1 va A_2B_2 kesmalarning o‘rtalari umumiy O nuqtadan iborat.
1) A_1A_2 va B_1B_2, A_1B_2 va A_2B_1 kesmalarning tengligini isbotlang.
2) A_1A_2 va B_1B_2 kesmalarning o‘rtalari O nuqta bilan bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

206. Agar to‘rtburchakning simmetriya markazi bo‘lsa, bu to‘rtburchak parallelogramm ekanini isbotlang.

207. Tekislikda $A(2;\ 2)$, $B(-2;\ 0)$, $C(3;\ 4)$, $D(0;\ 2)$, $E(-2;\ -2)$, $F(-4;\ 2)$, $K(3;\ -2)$, $L(-3;\ -3)$ nuqtalar berilgan. Bu nuqtalarga:
1) koordinata o‘qlariga; 2) koordinata boshi $O(0;\ 0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik nuqtalarni yasang va koordinatalarini yozing.

208. Simmetriya markaziga ega bo‘lgan uchburchak (to‘rtburchak) bormi?

209. O markazli aylanada ikkita o‘zaro teng va parallel vatar o‘tkazilgan. Ularning simmetriya markazini toping.

3- § ga doir qo'shimcha mashqlar

210. A, B va C nuqtalar berilgan. C nuqtaga AB to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan C_1 nuqtani faqat sirkuldan foydalanib yasang.

211. AB kesma hamda shunday ikki nuqta C va D berilganki, bunda $CA = CB$ va $DA = DB$ bo'lsin. A va B nuqta CD to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik ekanini isbotlang.

212. Turli tomonli uchburchak simmetriya o'qlariga ega emasligini isbotlang.

213. Teng yonli uchbuchakning asosiga o'tkazilgan medianasi yotgan to'g'ri chiziq uchburchakning simmetriya o'qi bo'lishini isbotlang.

214. $ABCD$ romb berilgan. BC to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriyada A nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtani yasang.

215. To'g'ri to'rtburchakning simmetriya o'qlari $x = 4$ va $y = 3$. Uning uchlaridan biri $A(7; 5)$, qolgan uchlarining koordinatalarini toping.

216. AB kesmaga O_1 nuqtaga nisbatan simmetrik A_1B_1 kesmani yasang, so'ngra A_1B_1 kesmaga O_2 nuqtaga nisbatan simmetrik kesmani yasang.

217. Berilgan nuqtaga nisbatan: 1) kesmaga; 2) burchakka; 3) nurga simmetrik bo'lgan shakl nimadan iborat bo'ladi?

218. Uchburchakning uchlari $A(-2; 1)$, $B(1; 5)$ va $C(4; -2)$ nuqtalarda yotadi. Koordinatalar boshiga nisbatan berilgan uchburchakka simmetrik bo'lgan uchburchakning koordinatalarini toping.

219. $A(5; 2)$, $B(5; -2)$, $C(2; 5)$ va $D(-5; -2)$ nuqtalar berilgan.

1) Bulardan qaysi biri koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik?

2) A va C nuqtalarning simmetriya markazini aniqlang.

220. Teng tomonli ABC uchburchak AC tomonining o'rtasiga nisbatan simmetriyada B uchi D nuqtaga o'tadi. $ABCD$ to'rtburchak – romb bo'lishini isbotlang.

221. To'g'ri chiziqda teng ikkita AB va CD kesmalar berilgan. Ularning simmetriya markazini yasang.

222. Parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasidan o'tkazilgan ixtiyoriy to'g'ri chiziq uni ikkita teng shaklga ajratishini isbotlang.

223. Ikkita teng aylana tashqi tomondan urinsa, ular urinish nuqtasiga nisbatan simmetrik bo'lishini isbotlang.

224. Radiuslari teng ikkita aylana berilgan. Berilgan aylanalarning simmetriya markazini toping.

3- TEST

1. To'g'ri mulohazani ko'rsating:

1) O'q simmetriyasida ikkita mos kesmalar parallel.
2) Markaziy simmetriyada ikkita mos nurlar yo'nalishdosh.
3) Ixtiyoriy beshburchak simmetriya markaziga ega.

A) 1; 2; B) 1; 3; C) 2; 3; D) 3.

2. Har qanday burchakning nechta simmetriya o'qi bor?

A) 0; B) 1; C) 2; D) cheksiz ko'p.

3. To'g'ri mulohazalarni ko'rsating:

1) Markaziy simmetriyada ikkita mos kesmalar parallel.
2) O'q simmetriyasida ikkita mos nurlar yo'nalishdosh.
3) Biror oltiburchak simmetriya o'qiga ega.

A) 1; 2; B) 1; 3; C) 2; 3; D) 1; 2; 3.

4. $B(5; -3)$, B_1 — Oy o'qiga nisbatan B nuqtaga simmetrik nuqta, B_2 esa Ox o'qiga nisbatan B_1 nuqtaga simmetrik nuqta. B_2 nuqtaning koordinatalarini toping.

A) $(5; 3)$; B) $(-5; -3)$; C) $(-5; 3)$; D) $(5; -3)$.

5. Quyidagi mulohazalardan qaysi biri to'g'ri?

1) To'g'ri to'rtburchakning ikkita simmetriya o'qi bor, ular uning diagonallaridir.
2) To'g'ri to'rtburchakning ikkita simmetriya o'qi bor, bu uning tomonlariga o'tkazilgan o'rta perpendikulardir.
3) To'g'ri to'rtburchakning to'rtta simmetriya o'qi bor.
4) 1-, 2-, 3- mulohazalar noto'g'ri.

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4.

6. Har qanday kesma nechta simmetriya o'qiga ega?

A) 0; B) 1; C) 2; D) cheksiz ko'p.

7. $A(-2; 3)$, A_1 nuqta Ox o'qiga nisbatan A nuqtaga simmetrik, A_2 esa Oy o'qiga nisbatan A_1 nuqtaga simmetrik nuqta. A_2 nuqtaning koordinatalarini toping.

A) $(2; -3)$; B) $(-2; -3)$; C) $(2; 3)$; D) $(-2; 3)$.

Tarixiy ma'lumotlar

Simmetriya haqida. «Simmetriya» yunoncha so'z bo'lib, o'zbek tiliga tarjimasi «o'lchovlik» yoki «o'lchovlilik» degan ma'noni beradi.

Arxitektura, rassomchilik, haykaltaroshlikda ham simmetriya moslik, tenglik va go'zallik ma'nosida ishlatiladi.

Simmetriya bilan odamlar juda qadim zamonlardan boshlab shug'ullanganlar. O'zbekiston hududida olib borilgan arxeologik qazish ishlari paytida topilgan ko'plab sopol idishlardagi bezaklarda simmetrik shakllarni ko'rishimiz mumkin. O'tmishdan qolgan arxitektura yodgorliklarining naqshlarida, ularning qurilishlarida ham ajoyib simmetriklik mavjud.

Poytaxtimizning 2200 yilligi munosabati bilan Toshkentning markazida qad rostlagan yangi me'moriy durdona bo'lmish «*O'zbekiston*» anjumanlar saroyi go'zalligi bilan barchani lol qoldirmoqda. Bu binoning balandligi 48 metr. Diametri 53 metr bo'lgan gumbazning ustiga farovon hayot va tinchlik ramzi – ikkita laylakning haykali o'rnatilgan. Saroyning bevosita foydalaniladigan maydoni 6,5 ming m^2 ni tashkil etadi. Mazkur binoda ko'plab yirik xalqaro miqyosdagi tadbirlarni o'tkazish rejalashtirilgan.

Toshkentdagi «O'zbekiston» anjumanlar saroyining ko'rinishi.

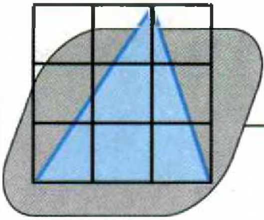
Yevklidning «Negizlar»ida simmetriya tushunchasi yo'q. Ammo bu asarning bir kitobida simmetriyaning fazoviy o'qi haqida tushuncha bor.

Simmetriya markazi haqidagi tushuncha birinchi marta XVI asrda yashagan **Xristofor Kladius** (1537–1612)ning asarida uchraydi.

Arxitektura haqida birinchi bo'lib kitob yozgan muhandis **Vitruvi** (I asr) bo'lib, u simmetriyani mufassal o'rgangan va uning arxitekturaga qanday tatbiq etilishini bayon etgan. So'ngra uyg'onish davrining ulug' rassomlari **Leonardo da Vinchi** va **Rafael** o'z ijodlarida simmetriyadan unumli foydalanishgan.

Elementar geometriyaga simmetriya nazariyasi elementlarini birinchi marta **Lejandr** (1752–1833) kiritgan. Lejandr simmetriya haqida gapirganda faqat tekislikka nisbatan simmetriyani aytadi. U simmetriyaga quyidagicha ta'rif bergan:

«Agar α tekislik AB kesmaga uning o'rtasida perpendikular bo'lsa, u holda A va B nuqtalar α tekislikka nisbatan simmetrik deyiladi».



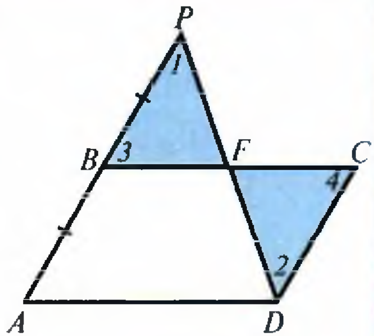
4- §. YUZLAR

19-mavzu. YUZ HAQIDA TUSHUNCHA. TENGDOSH SHAKLLAR

ABCD to'rtburchak — parallelogramm, P nuqta B nuqtaga nisbatan A nuqtaga simmetrik nuqta. $S_{ABCD} = S_{ADP}$ *ekanini isbotlang.*

Isbot. 1) $\triangle BPF = \triangle CDF$ — *tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra* ($AB =$ $= ... = ...$, $\angle 1 = \angle ...$ *va* $\angle 3 = \angle ...$, *bu burchaklar ... va ... parallel to'g'ri chiziqlarni ... va ... kesuvchilar kesganda hosil bo'lgan ... bo'lgani uchun), shuning uchun* $S_{BPF} = ...$.

2) $S_{ABCD} = S_{ABFD} + ...$, $S_{ADP} = S_{ABFD} + ...$, *shuning uchun* $S_{ABCD} = ...$.



— *Nuqtalar o'rniga mos javoblarni yoza olasiz-mi?*

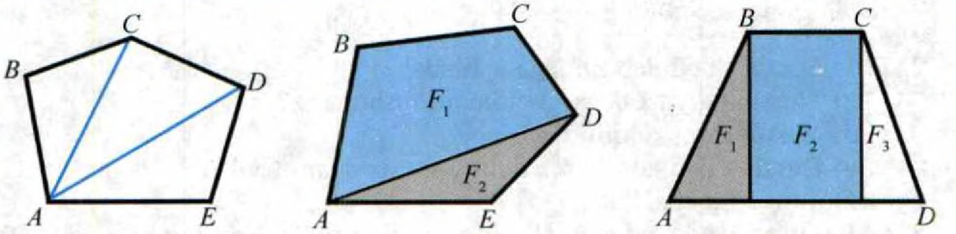
1. Yuz haqida tushuncha. Shakllarning yuzlarini aniqlash masalasi juda qadim zamonlarga borib taqaladi. Bu masalani insonlarning amaliy faoliyati taqozo qilgan. Har qaysimiz kundalik turmushimizda yuz haqida bir muncha tasavvurga egamiz. Biz endi shaklning yuzi to'g'risidagi tushunchalarni aniqlash va uni o'lchash usullarini topish bilan shug'ullanamiz.

Agar geometrik shaklni chekli sondagi yassi uchburchaklarga bo'lish mumkin bo'lsa, bu shakl *sodda shakl* deyiladi.

Biz yassi uchburchak deb tekislikning uchburchak bilan chegaralangan chekli qismini aytamiz. Qavariq yassi ko'pburchak sodda shaklga misol bo'ladi. Bu ko'pburchak o'zining biror uchidan chiqqan diagonallari bilan yassi uchburchaklarga bo'linadi (90- *a* rasm).

Bu paragrafda faqat yassi ko'pburchaklarni qaraymiz va shu sababli «yassi» so'zini qaytarmaymiz.

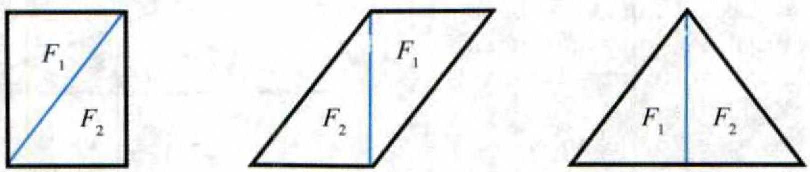
Yuz — bu musbat miqdor (kattalik) bo'lib, uning son qiymati quyidagi asosiy xossalarga (aksiomalarga) ega:



$S_{ABCDE} = S_{F_1} + S_{F_2}$ $\qquad$ $S_{ABCD} = S_{F_1} + S_{F_2} + S_{F_3}$

a) $\qquad$ *b)* $\qquad$ *d)*

90- rasm.



91- rasm.

1-xossa. *Teng uchburchaklar teng yuzlarga ega.*

2-xossa. *Agar ko'pburchak bir-birini qoplamaydigan ko'pburchaklardan tashkil topgan bo'lsa, u holda uning yuzi bu ko'pburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng bo'ladi.*

F ko'pburchak bir-birini qoplamaydigan ko'pburchaklardan tashkil topgan degani: 1) *F* bu ko'pburchaklar yig'indisidan iborat va 2) bu ko'pburchaklardan hech qaysi ikkitasi umumiy ichki nuqtalarga ega emas. Masalan, 90- *b, d* rasmda bir-birini qoplamaydigan ko'pburchaklardan tuzilgan ko'pburchaklar tasvirlangan.

2. Tengdosh shakllar.

Ta'rif. *Agar ikki ko'pburchakdan birini bir necha qismga bo'lib, bu qismlarni boshqacha joylashtirganda ikkinchi ko'pburchak hosil bo'lsa, bu ko'pburchaklar* ***teng tuzilganlar*** *deyiladi* (91- rasm).

Agar ikkita ko'pburchakning yuzlari teng bo'lsa, ular *tengdosh ko'pburchaklar* deb ataladi. 91- rasmdagi ko'pburchaklar tengdoshdir.

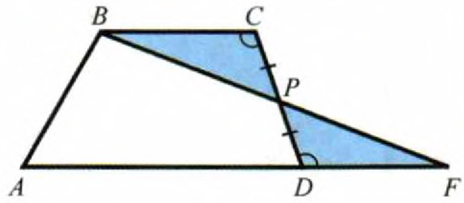
Teng ko'pburchaklar tengdoshdir (1- xossa), ammo teskari tasdiq, umuman aytganda, to'g'ri bo'lmaydi: agar ikki shakl tengdosh bo'lsa, bundan ularning tengligi kelib chiqmaydi.

Savol, masala va topshiriqlar

225. 1) Sodda shakl deb nimaga aytiladi?
2) Shaklning yuzi deganda nimani tushunasiz?
3) Yuzning xossalarini ifodalang.
4) Qanday ikki ko'pburchakni teng tuzilgan deyiladi?
5) Tengdosh shakllar nima?

226. Berilgan kvadrat diagonali bo'yicha ikki uchburchakka bo'lingan. Bu uchburchaklardan kvadratdan farqli nechta qavariq ko'pburchak yasash mumkin?

227. $ABCD$ trapetsiyada AD – katta asosi. CD tomonning o'rtasi P nuqta va B uchi orqali AD nurni F nuqtada kesuvchi to'g'ri chiziq o'tkazilgan (92- rasm). $S_{ABCD} = S_{ABF}$ ekanini isbot qiling.



92- rasm.

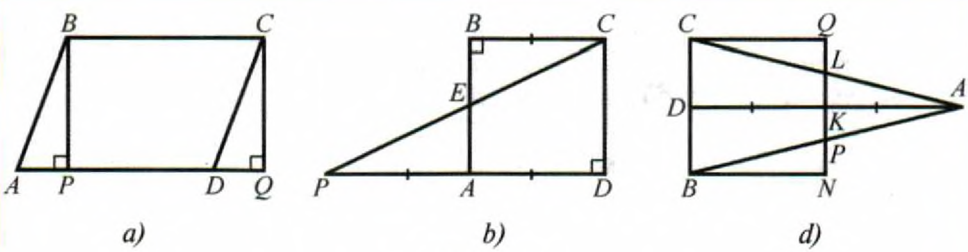
228. Teng tuzilgan ikkita to'g'ri to'rtburchakdan: 1) bu to'g'ri to'rtburchaklarning tengligi; 2) ularning tengdoshligi kelib chiqadimi?

229. To'g'ri to'rtburchakning diagonalini o'tkazing. Hosil bo'lgan uchburchaklardan nechta ko'pburchak tuzish mumkin?

230. $ABCD$ parallelogrammning BC tomonida P nuqta olingan. Parallelogrammning yuzi APD uchburchakning yuzidan ikki marta katta ekanini isbot qiling.

231. Teng yonli uchburchakni simmetriya o'qi bo'yicha qirqing va hosil bo'lgan ikki uchburchakdan mumkin bo'lgan barcha qavariq ko'pburchaklarni yasang.

232. 93- rasmda tasvirlangan ko'pburchaklar ichidan tengdoshlarini toping.



93- rasm.

20- mavzu. YUZNI O‘LCHASH

1. Yuzni o‘lchash. Yuz – tekis shakllarni xarakterlovchi asosiy matematik miqdorlardan biridir. Sodda hollarda yuz tekis shaklni to‘ldiruvchi birlik kvadratlar – tomoni uzunlik birligiga teng bo‘lgan kvadratlar soni bilan o‘lchanadi.

3-xossa. *Tomoni bir uzunlik o‘lchov birligiga teng bo‘lgan kvadratning yuzi birga teng.*

Berilgan shaklning yuzini o‘lchash uchun eng avval yuz birligi tanlab olinadi. Bunday birlik uchun, tomoni bir uzunlik birligiga, masalan, bir metrga, bir santimetrga va hokazo teng bo‘lgan kvadrat olinadi. Yuz birligini o‘lchanuvchi yuzga necha marta mumkin bo‘lsa, shuncha marta uni qo‘yamiz. Buni kichikroq yuzlar uchun qilish mumkin.

Haqiqatda, yuzlarni o‘lchash, yuz birligini yoki uning ulushlarini qo‘yish bilan emas, balki vositali yo‘l, ya’ni shakllarning ba’zi chiziqlarini o‘lchash yo‘li bilan bajariladi.

Masalan, tomonlari a va b butun sonlarga teng to‘g‘ri to‘rtburchakni qaraylik. Agar $a = 3$ va $b = 4$ bo‘lsa, to‘g‘ri to‘rtburchakni tomonlari bir uzunlik birligiga teng 12 ta kvadratga ajratish mumkin (94- rasm). To‘g‘ri to‘rtburchak yuzi esa 12 kv. birlikka teng bo‘ladi.


94- rasm.

Xuddi shunga o‘xshash a – butun songa teng uzunlik birligidagi kvadratning yuzi a^2 ga teng.

Umumiy holda, bu tasdiqni isbotlash ancha murakkab bo‘lgani uchun biz uni keltirmaymiz. Shunday qilib, quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema.

Tomonining uzunligi a ga teng bo‘lgan kvadratning yuzi a^2 ga teng.

Odatda, yuzni lotincha bosh harf S bilan belgilanadi. Demak, kvadrat uchun

$$S = a^2$$

bo‘lib, uzunlik o‘lchovi birligi kvadrat bilan ataladi.

Kvadratning yuzi uning tomoni uzunligining kvadratiga teng.

Qit’alarning, davlatlarning hududlari kvadrat kilometrda, katta ekin maydonlarining yuzi gektarlarda, uncha katta bo‘lmagan yer maydonlari ar (sotix)da o‘lchanadi.

2. Kvadrat ildiz.

Masala. Tomoni a ga teng bo'lgan kvadratning yuzi 100 sm^2 ga teng. Shu kvadratning tomonini toping.

Yechish. Shartga ko'ra: $S = a^2 = 100$ sm^2. Kvadrat tomonining uzunligi — musbat son. Kvadrati 100 ga teng bo'lgan musbat son esa 10 ga teng.

Javob: $a = 10$ sm.

Bu masalada musbat sonning kvadrati ma'lum bo'lganda, shu sonning o'zini topishimizga to'g'ri keldi, ya'ni $S > 0$ sonni bilgan holda, biz shunday $a > 0$ sonni topamizki, unda $S = a^2$ bo'ladi. Topilgan musbat a son quyidagicha belgilanadi: $a = \sqrt{S}$ va «a soni S dan chiqarilgan *arifmetik kvadrat ildizga* teng» deb o'qiladi. Arifmetik kvadrat ildizni topish amali *kvadrat ildizdan chiqarish* deb ataladi va u kvadratga ko'tarish amaliga teskari amaldir. $\sqrt{\ }$ — *arifmetik kvadrat ildiz* belgisi deyiladi.

Demak, $S = 100$ sm^2 bo'lgan kvadratning tomoni $a = \sqrt{S} = \sqrt{100} = 10$ (sm).

Musbat kvadrat ildizni topishni kvadratning yuziga ko'ra tomonini topish deb geometrik talqin qilish mumkin. Kvadrat ildiz chiqarish to'g'risida 8- sinf algebra kursida keng to'xtab o'tiladi.

O'zbekiston Respublikasining hududi — 448900 km^2.

Savol, masala va topshiriqlar

233. 1) Yuzni o'lchash haqida qanday xossani bilasiz?
2) Yuz o'lchov birliklaridan qaysilarini bilasiz?
3) Bir ar (sotix) necha kvadrat metrga teng?

234. Kvadratning tomoni: 1) 1,3 sm; 2) 0,15 dm; 3) 2,5 sm; 4) 18 dm; 5) $\frac{3}{4}$ dm; 6) 2,5 m; 7) 250 mm. Kvadratning yuzini toping.

235. Kvadratning yuzi: 1) 0,16 dm^2; 2) 1,44 sm^2; 3) 64 dm^2; 4) 121 sm^2; 5) 196 sm^2; 6) 49 mm^2; 7) 6,25 m^2. Kvadratning tomonini toping.

236. Kvadratning yuzi 36 sm^2. Agar uning hamma tomonini: 1) ikki marta uzaytirilsa; 2) uch marta kamaytirilsa; 3) 2 sm ga uzaytirilsa; 4) 1 sm ga qisqartirilsa, uning yuzi qanday o'zgaradi?

237. Tomonlari 54 sm va 42 sm ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning perimetriga teng bo'lgan kvadratning yuzini toping.

238. Agar kvadratning hamma tomonini: 1) n marta uzaytirilsa; 2) k marta kamaytirilsa, uning yuzi qanday o'zgaradi?

239. $ABCD$ kvadrat AD tomonining davomida D uchidan tashqarida P nuqta shunday olinganki, unda $PC = 20$ sm va $\angle CPD = 30°$. Kvadratning yuzini toping.

240. Kvadratning yuzi 64 dm^2 ga teng. Shu kvadratning yuzi necha kvadrat millimetr, necha kvadrat santimetr, necha kvadrat metr?

241. $(2a)^2 = 4a^2$ ekanini ko'rsatadigan shaklni chizing.

242. Yuzi: 1) 2,25 sm^2; 2) 0,81 dm^2; 3) 289 mm^2; 4) 5,76 m^2; 5) 144 sm^2; 6) 400 dm^2 ga teng bo'lgan kvadratning perimetrini toping.

21- mavzu. TO'G'RI TO'RTBURCHAKNING YUZI

Siz to'g'ri to'rtburchakning yuzi uning tomonlari uzunliklari ko'paytmasiga teng ekaniga doir masalalar yechgansiz.

Hozir bu bajarilgan amalning nazariy jihatdan to'g'ri ekanini ko'rsatamiz.

Teorema.

Tomonlari a va b bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi

$$S = a \cdot b$$

formula bo'yicha hisoblanadi.

Isbot. Tomonlari a va b bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni olaylik, bunda a va b — ixtiyoriy musbat sonlar. $S = a \cdot b$ ekanini isbotlaymiz.

Teoremani isbot qilish uchun tomoni $(a + b)$ bo'lgan kvadrat yasaymiz. Bu kvadratni 95- a rasmda ko'rsatilgan shakldagidek bo'laklarga ajratamiz. Bunda kvadratning yuzi tomoni a va b ga teng ikki kvadrat hamda tomonlari a va b bo'lgan ikki to'g'ri to'rtburchakdan tashkil topganini ko'rish mumkin.

Demak, tomoni $(a + b)$ bo'lgan kvadrat yuzi $S_1 + 2S + S_2$ ga teng. Ikkinchi tomondan yuza haqidagi xossaga ko'ra bu yuza $(a + b)^2$ ga teng, ya'ni

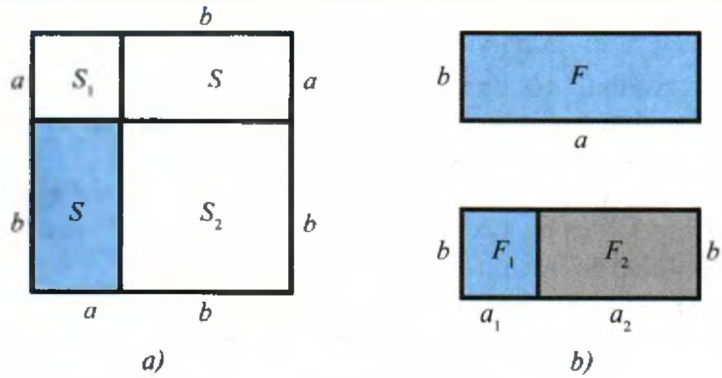
$$S_1 + 2S + S_2 = (a + b)^2, \text{ yoki } S_1 + 2S + S_2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Bu tenglikda $S_1 = a^2$, $S_2 = b^2$ ekanini hisobga olsak,

$$S = a \cdot b$$

kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.

To'g'ri to'rtburchakning yuzi uning qo'shni tomonlarining ko'paytmasiga teng.



95- rasm.

$S_F = a \cdot b$ tenglikning isboti haqida.

ab son haqiqatan ham, yuza haqidagi aksiomalarni qanoatlantiradi. Buni isbotlaymiz. 1- va 3- xossalarning bajarilishi ravshan, ya'ni teng to'g'ri to'rtburchaklar teng yuzga ega. Endi 2- xossa bajarilishini ko'rsatamiz.

Tomonlari *a* va *b* bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni tomonlari a_1 va *b* hamda a_2 va *b* bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarga ajratamiz (95- *b* rasm). U holda $S_{F_1} = a_1 b$, $S_{F_2} = a_2 b$ va $S_F = ab$ bo'ladi. Bundan tashqari $a_1 + a_2 = a$. Shuning uchun $S_{F_1} + S_{F_2} = a_1 b + a_2 b = (a_1 + a_2)b = ab = S_F$.

Shunday qilib, to'g'ri to'rtburchak uchun *ab* miqdor yuzning hamma xossalariga ega, ya'ni to'g'ri to'rtburchakning yuzi bo'ladi.

Savol, masala va topshiriqlar

243. 1) To'g'ri to'rtburchakning yuzi nimaga teng?
2) To'g'ri to'rtburchakning yuzi haqidagi teoremani isbotlashda qanday xossalardan foydalaniladi?

244. To'g'ri to'rtburchakning ikki tomoni: 1) 60 sm va 5,8 sm; 2) 3,4 dm va 6 sm; 3) 4 m va 1,4 m; 4) 2,5 dm va 1,2 dm. Uning yuzini toping.

245. Agar to'g'ri to'rtburchakning yuzi va tomonlaridan biri mos ravishda: 1) 270 sm^2 va 15 sm; 2) 142 dm^2 va 35,5 dm; 3) 16 m^2 va 400 sm; 4) 0,0096 km^2 va 300 m. Uning ikkinchi tomonini toping.

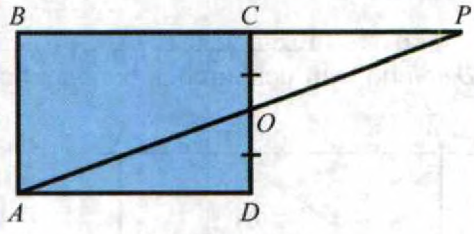
246. To'g'ri to'rtburchakning perimetri 26 sm ga teng, tomonlaridan biri esa 9 sm. To'g'ri to'rtbiurchakning yuziga teng yuzli kvadratning tomonini toping.

247. To'g'ri to'rtburchakning yuzi 400 sm^2, ikki tomonining nisbati $2:5$ ga teng. Shu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

248. To'g'ri to'rtburchakning asosini n marta, balandligini k marta uzaytirilsa, uning yuzi qanday o'zgaradi?

249. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak B burchagining bissektrisasi AD tomonni K nuqtada kesadi, $AK = 5$ sm va $KD = 7$ sm. To'g'ri to'rtburchakning yuzini toping.

250. 96- rasmda tasvirlangan $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning yuzi Q ga teng, O nuqta – DC tomonning o'rtasi. ABP uchburchakning yuzini toping. Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.



96- rasm.

Yechish. 1) $\Delta ADO = \Delta PCO$ – ... ko'ra ($DO = ...$ shartga ko'ra, $\angle AOD = \angle ... - ...$ bo'lgani uchun), shuning uchun $S_{ADO} = ...$.

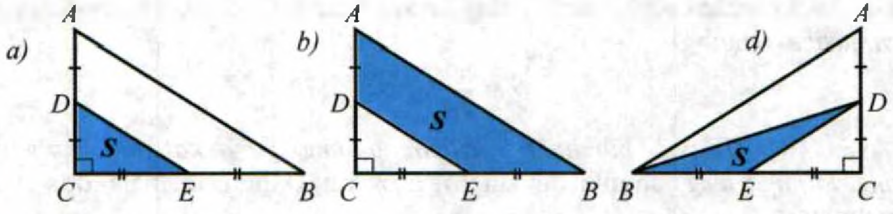
2) $S_{ABP} = S_{ABCO} + ... = S_{ABCO} + ... = ... = ...$. *Javob*: $S_{ABP} = ...$.

251. To'g'ri to'rtburchakning ikki tomoni: 1) 24 sm va 20 sm; 2) 3,5 dm va 8 sm; 3) 8 m va 4,5 m; 4) 3,2 dm va 1,5 dm. Uning yuzini toping.

252. To'g'ri to'rtburchakning bir tomoni 36 dm, ikkinchisi 16 dm. Unga tengdosh kvadratning tomonini toping.

22- mavzu. UCHBURCHAKNING YUZI

S shaklning yuzi ABC uchburchak yuzining qanday qismini tashkil qiladi? D, E – uchburchak tomonlarining o'rtalari.



– S shaklning yuzini topishga harakat qiling!

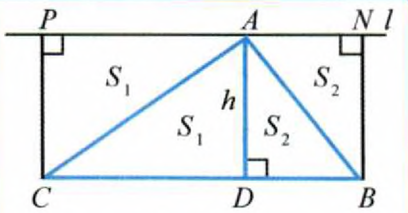
Uchburchak yuzini hisoblash formulasini topish uchun to'g'ri to'rtburchak shakliga keltirish usulidan foydalanamiz.

Teorema.

Uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko'paytmasining yarmiga teng:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

I s b o t. Bizga asosi $BC = a$ va shu tomonga tushirilgan balandligi $AD = h$ bo'lgan uchburchak berilgan bo'lsin (97- rasm).



97- rasm.

Teoremani isbot qilish uchun A nuqtadan BC tomonga parallel l to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra l ga CP va BN perpendikularlarni tushiramiz. Bunda $CBNP$ to'g'ri to'rtburchak hosil bo'ladi. Ma'lumki, bu to'g'ri to'rtburchakning yuzi ah ga teng.

Ammo hosil bo'lgan shaklda $\triangle ADC = \triangle CPA$ va $\triangle BDA = \triangle ANB$, chunki ular jufti-jufti bilan to'g'ri to'rtburchaklarning diagonallari kesishishidan hosil bo'lgan uchburchaklar. Bundan $CBNP$ to'g'ri to'rtburchakning yuzi berilgan uchburchak yuzidan ikki barobar katta ekanini hosil qilamiz, ya'ni

$$2S = a \cdot h.$$

Bundan, $S = \frac{ah}{2}$. Teorema isbot qilindi.

I z o h. Bu holda biz, AD balandlik asosi D nuqtani CB kesmaning ichki nuqtasi deb qaradik. Agar D nuqta CB kesma uchida, yoki CB ning davomi, ya'ni tashqarisida bo'lsa ham, teorema shu kabi isbot qilinadi. Buni o'zingiz tekshiring.

Uchburchakning yuzini hisoblash formulasini boshqacha ham o'qish mumkin: ***uchburchakning yuzi uning o'rta chizig'i bilan balandligining ko'paytmasiga teng:***

$$S = \frac{a}{2} \cdot h.$$

1- n a t i j a. *To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi katetlari ko'paytmasining yarmiga teng,* chunki bir katetni asos va ikkinchisini balandlik qilib olish mumkin.

2- n a t i j a. *Ikkita uchburchak yuzlarining nisbati asoslari bilan balandliklari ko'paytmasining nisbati kabidir.*

3-natija. *Asoslari teng bo'lgan ikki uchburchak yuzlarining nisbati balandliklarining nisbati kabidir.*

4-natija. *Balandliklari teng bo'lgan ikki uchburchak yuzlarining nisbati asoslarining nisbati kabidir.*

5-natija. *Asoslari va balandliklari teng bo'lgan uchburchaklar teng-doshdir.*

Yuqoridagi natijalarni mustaqil isbotlab, ishonch hosil qiling.

Savol, masala va topshiriqlar

253. 1) Uchburchakning yuzi nimaga teng?
2) To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi qanday hisoblanadi?
3) To'g'ri burchakli uchburchakning yuzini uchburchakning yuzi formulasi bilan hisoblash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

254. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 5 sm va 6 sm; 2) 2,4 dm va 45 sm. To'g'ri burchakli uchburchakning yuzini toping.

255. Bir uchburchakning asosi 20 sm, balandligi 8 sm. Ikkinchi uchburchakning asosi 40 sm. Uchburchaklar tengdosh bo'lishi uchun ikkinchi uchburchakning balandligi qanday bo'lishi kerak?

256. a — uchburchakning asosi, h — asosiga o'tkazilgan balandlik, S — uchburchakning yuzi. Noma'lum miqdorlarni toping.

	1	2	3	4	5	6
a	8 sm	0,6 dm	?	2,4 m	?	1,8 m
h	6 sm	?	28 sm	4 dm	3,6 sm	?
S	?	3 sm^2	75,6 sm^2	?	10,8 mm^2	72 dm^2

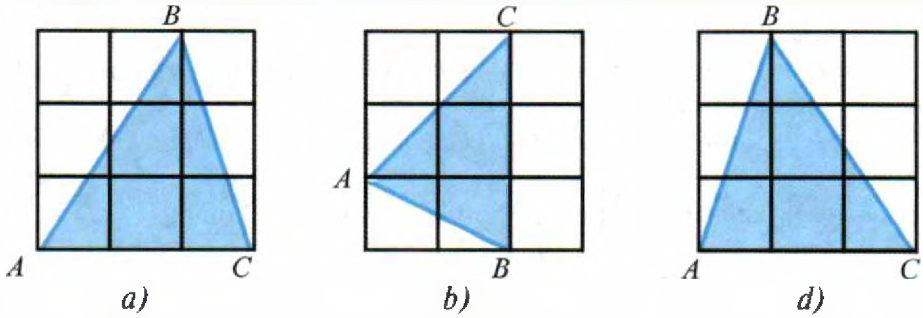
257. ABC uchburchakda $AB = 4AC$. Uchburchakning C va B uchlaridan o'tkazilgan balandliklarining nisbati qanchaga teng?

258. 1) ABC uchburchakda AD mediana o'tkazilgan. ABD va ACD uchburchaklar tengdosh ekanini isbot qiling.

2) $ABCD$ parallelogrammning diagonallari O nuqtada kesishadi. Hosil bo'lgan uchburchaklardan qaysilari tengdosh?

259. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 12 sm va 18 sm; 2) 4,5 dm va 14 sm. To'g'ri burchakli uchburchakning yuzini toping.

260. Agar uchburchakning asosi va balandligi mos ravishda quyidagilarga teng bo'lsa, uchburchakning yuzini toping: 1) 32 sm va 23 sm; 2) 5 dm va 4 m; 3) 3,3 dm va 13 sm; 4) 2,5 sm va 2,8 sm.



98- rasm.

261. Tomoni 3 ga teng bo'lgan kvadrat 9 ta teng kvadratchalarga bo'lindi (98- rasm). ABC uchburchakning yuzi nimaga teng?

23- mavzu. TRAPETSIYA VA PARALLELOGRAMMNING YUZI

1. Trapetsiyaning yuzi. Ma'lumki, har qanday ko'pburchakni diagonallar o'tkazish yo'li bilan uchburchaklarga ajratish mumkin. Bundan ixtiyoriy ko'pburchakning yuzini hisoblash uchun uni avval uchburchaklarga ajratib olamiz. So'ngra uchburchaklar yuzi hisoblanadi. Ko'pburchak yuzi esa uni tashkil qilgan bir-birini qoplamaydigan uchburchaklar yuzlari yig'indisiga teng bo'ladi. Parallelogramm va trapetsiya yuzlarini hisoblashda shu usuldan foydalanamiz.

Teorema.

Trapetsiyaning yuzi uning asoslari yig'indisining yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng:

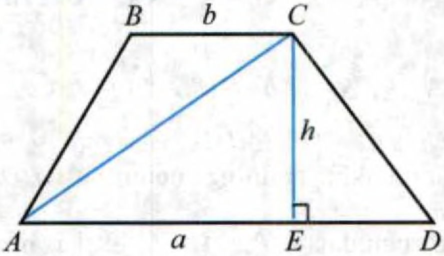
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Isbot. Asoslari $AD = a$, $BC = b$ va balandligi $CE = h$ $(CE \perp AD)$ bo'lgan $ABCD$ trapetsiyani qaraylik (99- rasm).

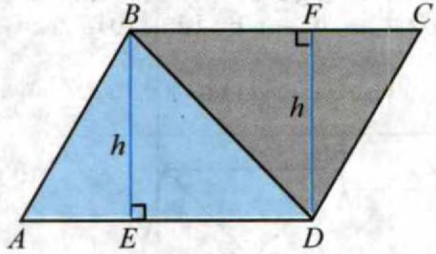
Trapetsiyada AC diagonalni o'tkazamiz. Bunda $ABCD$ trapetsiya ABC va ACD uchburchaklarga ajraladi. Trapetsiya yuzi esa bu uchburchaklar yuzlari yig'indisiga teng bo'ladi.

Parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa o'zgarmas bo'lgani uchun ABC va ACD uchburchaklarning balandliklari o'zaro teng.

Bundan, $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot CE = \frac{1}{2} b \cdot h$ va $S_{ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CE = \frac{1}{2} a \cdot h$.



99- rasm.



100- rasm.

Trapetsiyaning yuzi $S = S_{ABC} + S_{ACD}$, ya'ni:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h + \frac{1}{2}b \cdot h \text{ yoki } S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

Teorema isbot bo'ldi.

2. Parallelogrammning yuzi. Parallelogrammning istalgan tomonini uning *asosi* deb olish mumkin, u holda shu tomondan qarama-qarshi tomongacha bo'lgan masofa uning *balandligi* bo'ladi.

Teorema.

Parallelogrammning yuzi asosi bilan balandligining ko'paytmasiga teng:

$$S = a \cdot h.$$

Isbot. $ABCD$ parallelogrammni ko'rib chiqamiz. Bu parallelogrammning asosi uchun $AD = a$ tomonini olamiz, balandlik esa h teng bo'lsin.

$S = a \cdot h$ ekanligini isbot qilish talab etiladi (100- rasm).

Parallelogrammning BD diagonalini o'tkazamiz. U parallelogrammni asoslari a va balandliklari h ga ($BE \perp AD$, $DF \perp BC$, $BE = DF = h$) teng bo'lgan ikkita ABD va BCD uchburchakka ajratadi. Bu uchburchaklarning yuzlari o'zaro teng, ya'ni:

$$S_{ABD} = S_{BCD} = 0{,}5ah.$$

Parallelogrammning S yuzi esa bu uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng:

$$S = S_{ABD} + S_{BCD} = 0{,}5ah + 0{,}5ah = ah, \text{ ya'ni } S = a \cdot h.$$

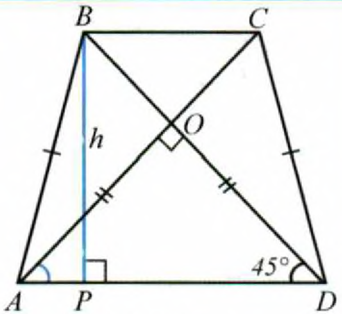
Teorema isbot qilindi.

Hosil qilingan formulalardan ba'zi bir muhim natijalarni keltirib chiqaramiz.

Masala. Teng yonli trapetsiyaning diagonallari o'zaro perpendikular bo'lsa, u holda trapetsiyaning balandligi uning o'rta chizig'iga, yuzi esa balandligining kvadratiga teng bo'ladi. Shuni isbot qiling.

Berilgan: $ABCD$ trapetsiya — teng yonli ($AB = DC$), $AC \perp BD$, $AD = a$, $BC = b$ bo'lsin (101- rasm).

Isbot qilish kerak: 1) $h = \frac{a+b}{2}$; 2) $S_{tr.} = h^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.



101- rasm.

Yechish. 1) ΔAOD — teng yonli, to'g'ri burchakli; shuning uchun $\angle ADO = 45°$.

2) B uchidan $BP \perp AD$ ni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan BPD uchburchak ham teng yonli va to'g'ri burchakli, chunki $\angle ADO = 45°$, va demak, $\angle PBD = 45°$. Bundan: $DP = BP$. Bizga ma'lumki, teng yonli trapetsiyaning kichik asosi uchidan o'tkazilgan balandlikning xossasiga ko'ra:

$$BP = DP = \frac{a+b}{2}.$$

3) $S_{tr.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = h \cdot h = h^2$, yoki $S_{tr.} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

Savol, masala va topshiriqlar

262. 1) Trapetsiyaning yuzi nimaga teng?
2) Parallelogrammning asosi va balandligi deganda nimani tushunasiz?

263. Trapetsiyaning asoslari 14 sm va 21 sm ga, balandligi esa 8 sm ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

264. $ABCD$ trapetsiyaning AD va BC asoslari mos ravishda 10 sm va 8 sm ga teng. ACD uchburchakning yuzi 30 sm^2 ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

265. To'g'ri burchakli trapetsiyaning yuzi 30 sm^2, perimetri 28 sm, kichik yon tomoni esa 3 sm ga teng. Katta yon tomonini toping.

266. To'g'ri burchakli trapetsiyada kichik asos 4 sm ga teng va kichik diagonali bilan 45° li burchak tashkil qiladi. Agar trapetsiyaning o'tmas burchagi 135° ga teng bo'lsa, uning yuzini toping.

267. $ABCD$ trapetsiyada AD — katta asos, $\angle D = 60°$. C va D burchaklarning bissektrisalari O nuqtada kesishadi, $OD = a$, $BC = b$, $AC = c$. Trapetsiyaning yuzini toping.

268. a – parallelogrammning asosi, h – balandlik, S – yuzi.

1) Agar $a = 60$ sm, $h = 0{,}5$ m bo'lsa, S ni; 2) agar $a = 250$ m, $S = 200$ m^2 bo'lsa, h ni; 3) agar $a = 0{,}25$ m, $h = 100$ sm bo'lsa, S ni; 4) agar $h = 2$ m, $S = 2\,000$ sm^2 bo'lsa, a ni toping.

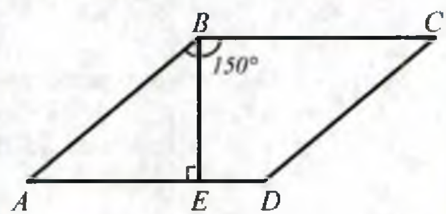
269. Perimetri 80 sm ga teng bo'lgan parallelogrammning tomonlari nisbati $2:3$ ga, o'tkir burchagi esa $30°$ ga teng. Parallelogrammning yuzini toping.

270. 1) Parallelogrammning yuzi 72 sm^2, balandliklari 4 sm va 6 sm. Parallelogrammning perimetrini toping.

2) Parallelogrammning tomonlari 12 sm va 16 sm, balandliklaridan biri esa 15 sm. Parallelogrammning ikkinchi balandligini toping. Masalaning nechta yechimi bor?

271. 1) BE – $ABCD$ parallelogrammning balandligi (102-rasm). Agar $AB = 13$ sm, $AD = 16$ sm va $\angle B = 150°$ bo'lsa, S_{ABCD} ni toping.

2) Parallelogrammning a va b tomonlari orasidagi burchak $30°$. Shu parallelogrammning yuzini toping.



102- rasm.

272. AD – $ABCD$ trapetsiyaning katta asosi. ACD va DCB uchburchaklarning yuzlari mos ravishda S_1 va S_2 ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

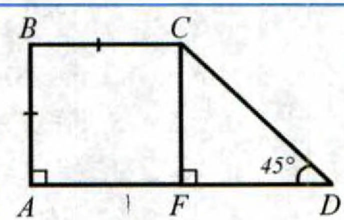
273. $ABCD$ to'g'ri burchakli trapetsiyada $AB = BC = 18$ sm, $\angle D = 45°$ (103- rasm). Trapetsiyaning yuzini toping. Bo'sh joylarga mos javoblarni yozing.

Yechish. $CF \perp AD$ ni o'tkazamiz. 1) $ABCF$ – kvadrat, chunki $ABCF$ to'rtburchakning qo'shni tomonlari AB va ..., shuning uchun $AF = CF = ...$ (sm).

2) ΔCFD – to'g'ri burchakli, yasashga ko'ra $\angle F = 90°$ va shartga ko'ra $\angle D = 45°$, shuning uchun $\angle DCF = ...°$ va demak, ΔCFD – ... va $DF = ... = ...$ sm.

3) $AD = AF + ... = ... + ... = ...$ (sm) va $S_{ABCD} = ... \cdot ... = ... \cdot ... = ...$ (sm^2).

Javob: ... sm^2.



103- rasm.

274. Teng yonli trapetsiyaning perimetri 32 sm, yon tomoni 5 sm va yuzi 44 sm^2 ga teng. Trapetsiyaning balandligini toping.

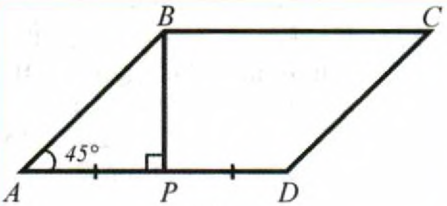
275. Trapetsiyaning asoslari 36 sm va 12 sm, 7 sm li yon tomoni asoslaridan biri bilan 150° burchak hosil qiladi. Uning yuzini toping.

276. 1) Asoslari 16 va 24 ga teng bo'lgan teng yonli trapetsiyaning diagonallari o'zaro perpendikular. Trapetsiyaning yuzi nechaga teng?
2) Trapetsiyaning o'rta chizig'i 6 ga, balandligi 16 ga teng. Uning yuzini toping.

277. Parallelogrammning tomonlaridan biriga o'tkazilgan balandligi shu tomondan 3 marta kichik. Parallelogrammning yuzi 96 sm^2. Shu tomonni va balandlikni toping.

278. Parallelogrammning tomonlari 20 sm va 28 sm, ular orasidagi burchagi 30°. Uning yuzini toping.

279. Yuzi 41 sm^2 bo'lgan parallelogrammning tomonlari 5 sm va 10 sm. Uning ikkala balandligini toping.



104- rasm.

280. BP — $ABCD$ parallelogrammning balandligi (104- rasm). Agar $AP = PD$, $BP = 6{,}4$ sm va $\angle A = 45°$ bo'lsa, S_{ABCD} ni toping.

24- mavzu. KO'PBURCHAKNING YUZI

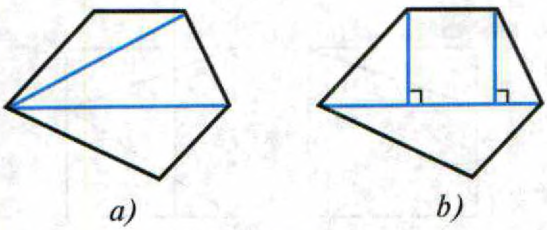
Ko'pburchakning yuzini hisoblash uchun uni o'zaro kesishmaydigan, ya'ni umumiy ichki nuqtalari bo'lmagan uchburchaklarga ajratish va ularning yuzlari yig'indisini topish mumkin. Qavariq ko'pburchakni uchburchaklarga ajratish uchun, masalan, uning bir uchidan diagonallar o'tkazish yetarli (105- *a* rasm). Ba'zan boshqacha ajratishlardan foydalanish qulay (105- *b* rasm).

1-masala. $ABCDE$ ko'pburchakda $BD \parallel AE$, $CP \perp AE$ ekani ma'lum (106- rasm). $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$ ekanini isbotlang.

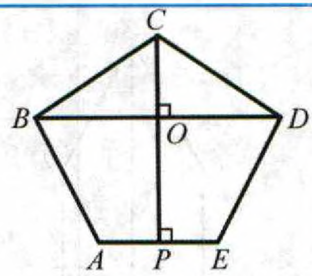
Yechish. Berilgan shaklning trapetsiya va uchburchakdan tashkil topganini ko'rish qiyin emas. Shu sababli yuzning xossasiga ko'ra:

$$S_{ABCDE} = S_{BCD} + S_{ABDE} = 0{,}5BD \cdot CO + 0{,}5(AE + BD) \cdot OP =$$
$$= 0{,}5(\underline{BD \cdot CO} + AE \cdot OP + \underline{BD \cdot OP}) = 0{,}5(BD \cdot (CO + OP) +$$
$$+ AE \cdot OP) = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP).$$

Demak, $S_{ABCDE} = 0{,}5(BD \cdot CP + AE \cdot OP)$.



105- rasm.



106- rasm.

2- m a s a l a . AC va BD — $ABCD$ to‘rtburchakning diagonallari, O — diagonallarining kesishish nuqtasi (107- rasm) $S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ va $S_{AOD} = S_4$ bo‘lsa, $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ ekanini isbotlang.

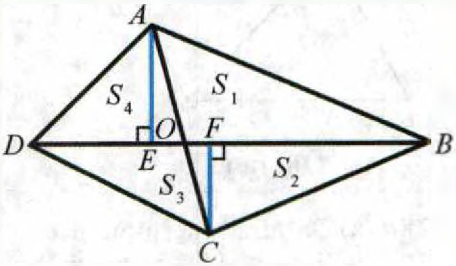
Y e c h i s h . 1) $AE \perp BD$ va $CF \perp BD$ larni o‘tkazamiz.

2) $\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{0{,}5OB \cdot AE}{0{,}5OD \cdot AE} = \dfrac{OB}{OD}$ (1) va

$\dfrac{S_2}{S_3} = \dfrac{0{,}5OB \cdot CF}{0{,}5OD \cdot CF} = \dfrac{OB}{OD}$. (2)

3) (1) va (2) dan topamiz:

$\dfrac{S_1}{S_4} = \dfrac{S_2}{S_3} \Rightarrow S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.



107- rasm.

Savol, masala va topshiriqlar

281. 1) Matndagi 1- masalani boshqacha ham yechish mumkinmi?

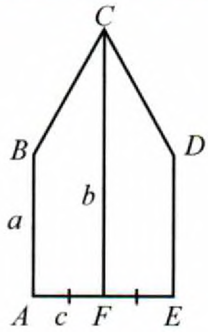
2) To‘rtburchak diagonallari kesishishidan hosil bo‘lgan qarama-qarshi uchburchaklar yuzlarining ko‘paytmasi tengligini isbotlang.

282. 108- rasmda tasvirlangan shakl yuzini hisoblash uchun formula keltirib chiqaring. Bunda $AB \parallel DE \parallel CF$, $AB = DE$, $AF = FE$, $CF \perp AE$.

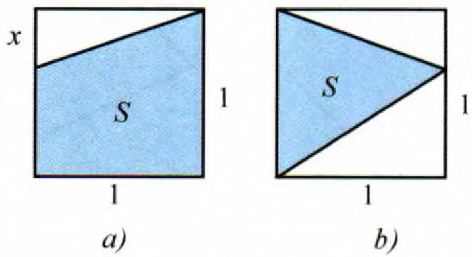
283. Diagonallari o‘zaro perpendikular bo‘lgan to‘rtburchakning yuzi diagonallari ko‘paytmasi yarmiga teng ekanini isbot qiling.

284. Tomoni 1 ga teng bo‘lgan kvadrat berilgan (109- rasm). Undan S yuzli shakl qirqib olindi. Agar x miqdor ma’lum bo‘lsa, S yuzni hisoblash uchun formula yozing.

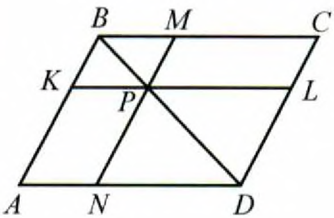
285. B e r i l g a n : $ABCD$ — parallelogramm, $P \in BD$, $KL \parallel BC$, $MN \parallel AB$ (110- rasm). I s b o t q i l i s h k e r a k : $S_{AKPN} = S_{PMCL}$.



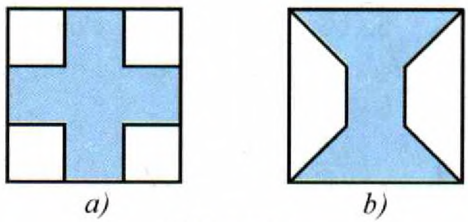
108- rasm.



109- rasm.



110- rasm.



111- rasm.

286. a) Kvadratning tomoni a ga teng. Uning har bir tomoni teng uchga bo'lingan. 111- rasmdagi bo'yalgan yuzlarni toping.

b) Agar: 1) $a = 12$ sm; 2) $a = 3{,}6$ dm; 3) $a = 60$ mm; 4) $a = 4{,}8$ dm; 5) $a = 15$ sm; 6) $a = 27$ dm bo'lsa, a) banddagi yuzlarni toping.

25- mavzu. MASALALAR YECHISH

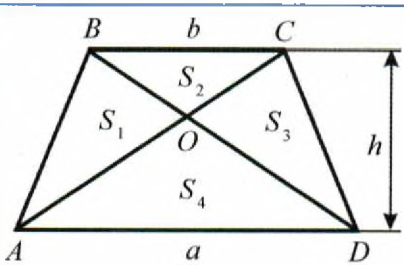
Bu mavzuda yuzlarni topishga doir ayrim tayanch masalalar hamda ularni yechishning turli usullari keltirilgan.

1-masala. BC va AD – $ABCD$ trapetsiyaning asoslari, O – AC va BD diagonallarining kesishish nuqtasi (112- rasm). $AD = a$, $BC = b$.

$S_{AOB} = S_1$, $S_{BOC} = S_2$, $S_{COD} = S_3$ va

$S_{AOD} = S_4$ bo'lsa, isbot qiling:

1) $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$;



112- rasm.

2) $S_{tr.} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$.

Yechish. 1) $S_{ABC} = S_{DBC} = \frac{1}{2}bh \Rightarrow S_1 + \underline{S_2} = S_3 + \underline{S_2} \Rightarrow S_1 = S_3$.

2) Bizga $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$ ekani ma'lum. $S_1 = S_3$ ni nazarga olsak, $S_1 = S_3 = \sqrt{S_2 \cdot S_4}$ kelib chiqadi. Masalaning birinchi qismi isbotlandi.

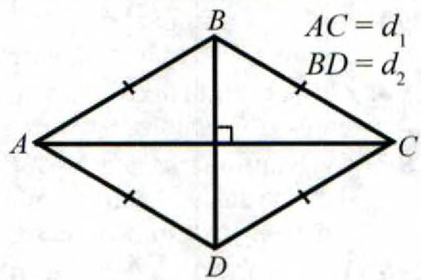
3) Trapetsiyaning yuzi to'rtta uchburchak yuzlarining yig'indisiga teng ekanini va yuqoridagi natijalarni e'tiborga olib, ega bo'lamiz:

$$S_{tr.} = \underline{S_1} + S_2 + \underline{S_3} + S_4 = S_2 + 2S_1 + S_4 =$$
$$= \left(\sqrt{S_2}\right)^2 + 2\sqrt{S_2 \cdot S_4} + \left(\sqrt{S_4}\right)^2 = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2.$$

Demak, $S_{tr.} = \left(\sqrt{S_2} + \sqrt{S_4}\right)^2$. Masalaning ikkinchi qismi isbotlandi.

2-masala. *Rombning yuzi uning diagonallari ko'paytmasining yarmiga teng.*

Yechish. Ma'lumki, rombning AC diagonali uni ikkita o'zaro teng teng yonli uchburchakka ajratadi (113- rasm). Ikkinchi diagonal esa, birinchisiga perpendikular bo'lib, hosil bo'lgan uchburchaklar balandliklari yig'indisiga teng bo'ladi. Shuning uchun rombning yuzi:



113- rasm.

$$S = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{1}{2}d_2 + \frac{1}{2}d_1 \cdot \frac{1}{2}d_2 = \frac{1}{4}(d_1 \cdot d_2 + d_1 \cdot d_2) = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot d_1 \cdot d_2 = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2.$$

Demak, $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$.

Savol, masala va topshiriqlar

287. $ABCD$ parallelogrammning AB tomonida shunday P nuqta olinganki, unda $DP \perp AB$. $ABCD$ parallelogrammning yuzi $DP \cdot AB$ ga teng ekanini isbotlang.

288. To'g'ri to'rtburchak shaklidagi yer maydonning yuzi 200 ga. Agar: 1) maydonning bo'yi 10 km bo'lsa; 2) maydon kvadrat shaklida bo'lsa, uning perimetri qancha bo'ladi?

289. Asoslari umumiy va uchlari asosga parallel to‘g‘ri chiziqda yotgan uchburchaklar tengdoshdir. Shuni isbot qiling.

290. 1) Kvadratning yuzi uning diagonali kvadratining yarmiga teng ekanini isbotlang.

2) Uchburchakning a va b tomonlariga o‘tkazilgan balandlik h_a va h_b bilan belgilangan. $\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$ ekanini isbot qiling.

291. $ABCD$ ($AD \parallel BC$) trapetsiyada diagonallar o‘tkazilgan, ular kesishgan nuqta O bilan belgilangan. Hosil bo‘lgan barcha tengdosh uchburchaklarni jufti-jufti bilan ko‘rsating.

292. ABC uchburchak chizing. A uchi orqali ikkita to‘g‘ri chiziqni shunday o‘tkazingki, ular bu uchburchakni yuzlari teng bo‘lgan uchta uchburchakka bo‘lsin.

4- § ga doir qo‘shimcha mashqlar

293. $ABCD$ to‘rtburchakda $BD = 12$ sm. B uchi AC to‘g‘ri chiziqdan 4 sm uzoqda. ABC uchburchakning yuzini toping.

294. ABC uchburchakda $\angle C = 135°$, $AC = 6$ dm, BD balandlik 2 dm ga teng. ABD uchburchakning yuzini toping.

295. Toshkent markazida qad rostlagan «Forumlar saroyi»ning bevosita kishi foydalanadigan maydoni 6,5 ming m^2 ni tashkil etadi. Shu yuza: 1) necha gektarni; 2) necha ar (sotix)ni tashkil etadi?

296. AC va BD — $ABCD$ to‘rtburchakning diagonallari, O — ularning kesishish nuqtasi. $S_{AOD} = 12$, $S_{BOC} = 8$, $S_{AOB} = 6$. S_{COD} ni toping.

297. To‘g‘ri burchakli uchburchakda katetlar ko‘paytmasi gipotenuza bilan unga o‘tkazilgan balandlik ko‘paytmasiga tengligini isbotlang.

298. Ikkita uchburchakning asoslari teng. Ularning yuzlari shu tomonlarga o‘tkazilgan balandliklar nisbati kabi ekanini isbotlang.

4- TEST

1. Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari 4 marta orttirilsa, uning yuzi necha marta ortadi?

A) 4; B) 8; C) 16; D) 32.

2. To‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi 400 ga, tomonlarining nisbati 4 : 1 ga teng. Shu to‘g‘ri to‘rtburchakning perimetrini toping.

A) 100; B) 200; C) 120; D) 80.

3. To‘g‘ri to‘rtburchakning uzunligi 25% ga orttirildi. Uning yuzi o‘zgarmasligi uchun enini necha protsentga (foizga) kamaytirish kerak?

A) 20%; B) 16%; C) 25%; D) 18%.

4. Asoslari 8 va 12 ga teng bo‘lgan teng yonli trapetsiyaning diagonallari o‘zaro perpendikular. Trapetsiyaning yuzini toping.

A) 100; B) 64; C) 144; D) 76.

5. Trapetsiyaning yuzi 30 ga, balandligi 6 ga teng bo‘lsa, uning o‘rta chizig‘i qanchaga teng bo‘ladi?

A) 2,5; B) 5; C) 7,5; D) 4,5.

6. Yuzi 144 sm^2, balandliklari 8 sm va 12 sm bo‘lgan parallelogrammning perimetrini toping.

A) 40 sm; B) 30 sm; C) 80 sm; D) 60 sm.

7. *ABCD* parallelogrammning *AC* diagonaliga *BO* perpendikular tushirilgan. $AO = 8$, $OC = 6$ va $BO = 4$ bo‘lsa, parallelogrammning yuzini toping.

A) 50; B) 28; C) 52; D) 56.

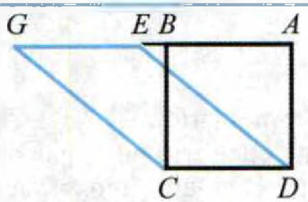
Tarixiy ma’lumotlar

Ibn Sino «Donishnoma» asarining V bobi «To‘rtburchaklar, ularda joylashgan uchburchaklar va ularning munosabatlariga doir asosiy geometrik masalalar»ga bag‘ishlangandir.

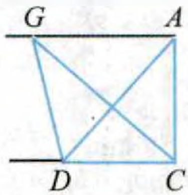
1-teorema. O‘zaro parallel ikki chiziq orasiga joylashgan, umumiy asosga ega va qarama-qarshi tomonlari parallel shakllar tengdosh bo‘ladi (ya’ni ularning yuzlari teng). Masalan, asoslari *CD* bo‘lgan *ABCD* va *EGCD* tekis shakllar o‘zaro tengdosh bo‘ladi (114- rasm).

2-teorema. O‘zaro parallel chiziqlar orasiga joylashgan va umumiy asosga ega bo‘lgan uchburchaklar tengdosh bo‘ladi. Masalan, *CD* asosga ega bo‘lgan *ACD* va *GCD* uchburchaklar tengdosh bo‘ladi (115- rasm).

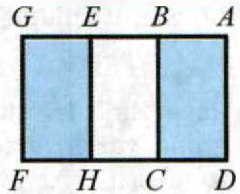
3-teorema. O‘zaro parallel chiziqlar orasiga joylashgan va asoslari teng bo‘lgan to‘rtburchaklar tengdosh bo‘ladi. Masalan, *ABCD* va *GEHF* to‘rtburchaklar tengdosh (116- rasm).



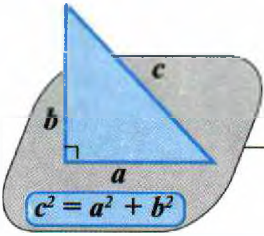
114- rasm.



115- rasm.



116- rasm.



5- §. PIFAGOR TEOREMASI

26- mavzu. PIFAGOR VA UNING TEOREMASI HAQIDA

Buyuk yunon matematigi Pifagorning hayoti haqida ma'lumotlar juda oz. U eramizdan oldingi VI asrning ikkinchi yarmida Egey dengizining Samos orolida tug'ilgan. Keyinchalik u janubiy Italiyadagi Kroton shahrida yashagan, shu yerda o'z maktabiga asos solgan. Pifagor maktabi shakllarni ajratish va to'g'ri chiziqli shakllarni tengdosh shakllarga almashtirishning geometrik usulidan teoremalarni isbot qilish va masalalar yechishda ham foydalanganligi yunon matematiklarining asarlaridangina bizga ma'lum. Xususan, geometriyaning fan sifatida tarkib topishida Pifagor va uning maktabi katta hissa qo'shgan. Quyida keltiriladigan teorema Pifagor nomi bilan yuritiladi. Uning mazmuni quyidagicha:

Teorema.

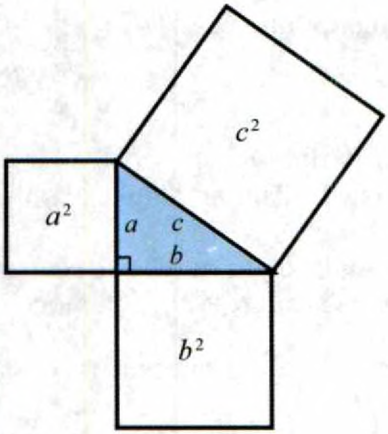
(Pifagor teoremasi.) **To'g'ri burchakli uchburchak gipotenuzasining kvadrati uning katetlari kvadratlarining yig'indisiga teng.**

Bu teorema to'g'ri burchakli uchburchakka oid bo'lib, uchburchak tomonlariga teng kvadratlarning yuzlari orasidagi munosabatni ko'rsatadi. Pifagor bu teoremaning nazariy isbotini keltirgan. Pifagor teoremasi bilan aniqlangan geometrik munosabatning xususiy hollari Pifagordan oldin ham turli xalqlarda ma'lum edi, ammo teoremaning bu umumiy shakli Pifagor maktabiga nisbatan beriladi.

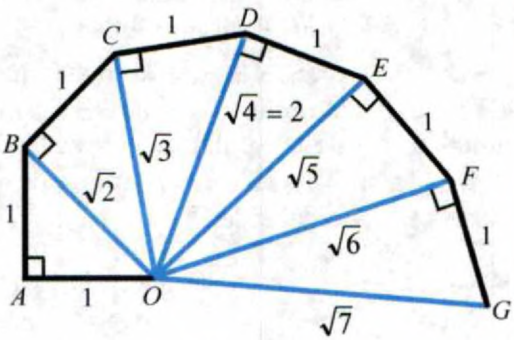
Katetlari a va b, gipotenuzasi c bo'lgan to'g'ri burchakli ABC uchburchak berilgan bo'lsin, u holda Pifagor teoremasi

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1}$$

formula bilan ifodalanadi, bunda a^2, b^2, c^2 — tomonlari a, b, c bo'lgan kvadratlarning yuzlariga teng. Shuning uchun bu tenglik tomoni gipotenuzaning uzunligiga teng kvadratning yuzi tomonlari katetlarga teng kvadratlarning yuzlari yig'indisiga teng ekanini ko'rsatadi (117- rasm).



117- rasm.



118- rasm.

Agar a, b va c butun musbat sonlar uchun $a^2 + b^2 = c^2$ tenglik bajarilsa, bu sonlar *Pifagor sonlari* yoki *Pifagor uchliklari* deb ataladi. Agar to'g'ri burchakli uchburchak katetlari va gipotenuzasining uzunliklari butun sonlar bilan ifodalansa, bu sonlar Pifagor uchligini hosil qiladi. Bunday uchlikka 3, 4 va 5 sonlari misol bo'la oladi. Haqiqatan, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Tomonlari 3, 4 va 5 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak yasashdan Misrda yer ustida to'g'ri burchak yasash uchun foydalanilgan. Shuning uchun bunday uchburchak ko'pincha *«misr uchburchagi»* deb ataladi.

Pifagor teoremasi to'g'ri burchakli uchburchakning istalgan ikki tomoniga ko'ra uchinchi tomonini topish imkonini beradi.

Pifagor teoremasining tatbig'iga misol tariqasida tomoni 1 birlikka teng bo'lgan kvadratning diagonalini topamiz. Kvadratning diagonali har bir kateti 1 birlikdan bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasidan iborat. Pifagor teoremasiga asosan diagonalning kvadrati $1^2 + 1^2 = 2$, bundan esa diagonalning uzunligi $\sqrt{2}$ bo'ladi.

Bu teorema tatbig'ining ikkinchi misoli sifatida uzunligi $\sqrt{n}$ ga teng bo'lgan kesma yasash usulini ko'rsatamiz, bunda n — ixtiyoriy natural son. Biror to'g'ri chiziqning O nuqtasini olib, unda uzunligi 1 ga teng OA kesma ajratamiz (118- rasm), A nuqtadan bu to'g'ri chiziqqa perpendikular o'tkazamiz va unda $AB = 1$ kesma ajratamiz. B nuqtani O nuqta bilan tutashtirib, $BO = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ kesmani hosil qilamiz.

B nuqtadan OB ga perpendikular o'tkazamiz va bu perpendikularda $BC = 1$ kesmani ajratamiz. C va O nuqtalarni tutashtirib, $CO=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$ kesmani hosil qilamiz va shunday yasashni davom ettirib, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ va h.k. ga teng kesmalarni hosil qilamiz.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ kesmalar uzunlik birligi uchun qabul qilingan OA kesma bilan umumiy o'lchovsiz ekanini qayd qilamiz, chunki ularning uzunliklari irratsional sonlar bilan ifodalanadi.

Ma'lumot uchun. Tomonlari butun sonli to'g'ri burchakli uchburchak tuzish qoidalaridan biri ham pifagorchilarga tegishli, chunonchi: a, $\frac{a^2-1}{2}$ va $\frac{a^2+1}{2}$ sonlari Pifagor uchlik sonlarini hosil qiladi, bunda a — ixtiyoriy toq son. Yana boshqa bir qoida ham bor: a, $\left(\frac{a}{2}\right)^2-1$ va $\left(\frac{a}{2}\right)^2+1$ sonlari Pifagor uchlik sonlarini hosil qiladi, bunda a — juft son.

Bu qoidadan foydalanib, quyidagi namuna bo'yicha Pifagor sonlari jadvalini tizish mumkin:

a katet	b katet	c gipotenuza	a katet	b katet	c gipotenuza
3	4	5	12	35	37
5	12	13	13	84	85
7	24	25	16	63	65
9	40	41	17	144	145
11	60	61	19	180	181

Agar a, b va c sonlar Pifagor uchlik sonlarini hosil qilsa, ma, mb va mc sonlari ham Pifagor sonlari bo'lishi o'z-o'zidan ayon, bunda m — butun musbat son. Demak, $2\cdot3$, $3\cdot4$ va $2\cdot5$, ya'ni 6, 8 va 10 sonlari ham Pifagor uchlik sonlarini tashkil etadi yoki $3\cdot5$, $3\cdot12$ va $3\cdot13$, ya'ni 15, 36 va 39 sonlari ham Pifagor sonlari bo'ladi.

Shuningdek, katetlari a, b va gipotenuzasi c bo'lgan uchburchakning tomonlari $a=m^2-n^2$, $b=2mn$, $c=m^2+n^2$ formulalar bilan ifodalanishini isbotlash mumkin, bunda m va n ixtiyoriy natural sonlar bo'lib, unda $m>n$.

Masalan: $m=2$ va $n=1$ uchun $a=3$, $b=4$, $c=5$; $m=3$ va $n=1$ uchun $a=8$, $b=6$, $c=10$; $m=3$ va $n=2$ uchun $a=5$, $b=12$, $c=13$ bo'ladi.

Savol, masala va topshiriqlar

299. 1) Pifagor haqida nimani bilasiz?
2) Siz Pifagor teoremasining qanday ifodasini bilasiz?
3) «Gipotenuzaning kvadrati», «katetning kvadrati» degan iboralarni qanday tushunasiz?

300. To‘g‘ri burchakli uchburchakning a va b kateti berilgan. Agar: 1) $a=6$, $b=8$; 2) $a=15$, $b=8$; 3) $a=1$, $b=1$; 4) $a=1{,}5$, $b=2$; 5) $a=0{,}5$, $b=1{,}2$; 6) $a=0{,}8$, $b=0{,}6$ bo‘lsa, c gipotenuzani toping.

Namuna. Masalan, $a=4\sqrt{2}$ va $b=7$ bo‘lsin. $c^2=a^2+b^2$, bundan $c=\sqrt{...^2+...^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+...^2}=\sqrt{...+49}=...$.

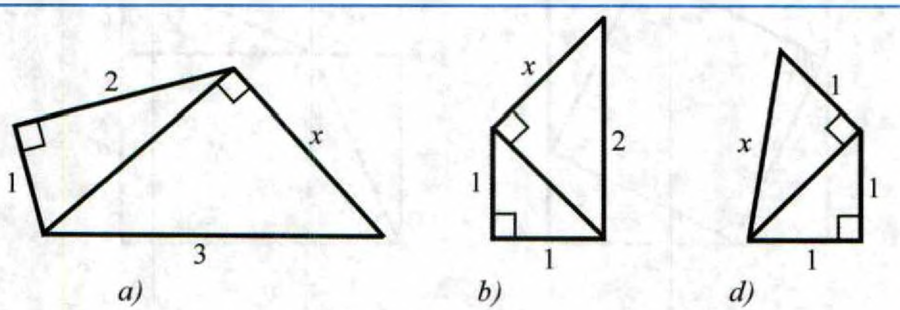
301. a) To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlarini bilgan holda, uning diagonali qanday topiladi? Pifagor teoremasidan foydalanib, to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari tengligini isbotlang.
b) To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari: 1) 2,4 dm va 7 sm; 2) 20 dm va 12 dm; 3) 8 dm va 1,5 m. Uning diagonalini toping.

302. Noma’lum x kesma uzunligini toping (119- rasm).

303. To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning katta diagonali 13 sm ga, katta asosi esa 12 sm ga teng. Agar trapetsiyaning kichik asosi 8 sm ga teng bo‘lsa, uning yuzini toping.

304. To‘g‘ri burchakli uchburchakda a va b — katetlar, c — gipotenuza. Agar: 1) $a=1{,}2$, $c=1{,}3$; 2) $a=7$, $c=9$; 3) $a=1{,}5$, $c=1{,}7$; 4) $a=2$, $c=2{,}5$; 5) $a=7$, $c=24$ bo‘lsa, b katetni toping.

Namuna. Masalan, $a=3\sqrt{3}$ va $c=5\sqrt{3}$ bo‘lsin. $b^2=c^2-a^2$, bundan $b=\sqrt{...^2-...^2}=\sqrt{(5\sqrt{3})^2-...^2}=\sqrt{...-27}=\sqrt{...}=...$.



119- rasm.

27- mavzu. PIFAGOR TEOREMASINING ISBOTI

Katetlari a, b va gipotenuzasi c ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak berilgan. Bu uchburchak uchun Pifagor teoremasi o'rinli ekanini isbot qilamiz, ya'ni

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ekanini ko'rsatamiz.

Buning uchun tomoni berilgan to'g'ri burchakli uchburchak katetlari yig'indisi $(a + b)$ ga teng bo'lgan ikkita kvadrat yasaymiz. Kvadratlarni 120- rasmda ko'rsatilgan usul bilan to'g'ri burchakli uchburchaklar va kvadratlarga ajratib chiqamiz. Chizmalardan birinchisida hosil bo'lgan to'rtburchak kvadrat ekanini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, avvalo bu to'rtburchak romb, chunki uning tomoni katetlari a va b bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi c ga teng. Chizmadagi x burchakning kattaligini topish uchun $\angle x + \angle 1 + \angle 3 = 180°$, $\angle 3 = \angle 2$ va $\angle 1 = 90° - \angle 2$ ekanini e'tiborga olib, topamiz: $\angle x = 90°$. Ma'lumki, to'g'ri burchakli romb — kvadratdir.

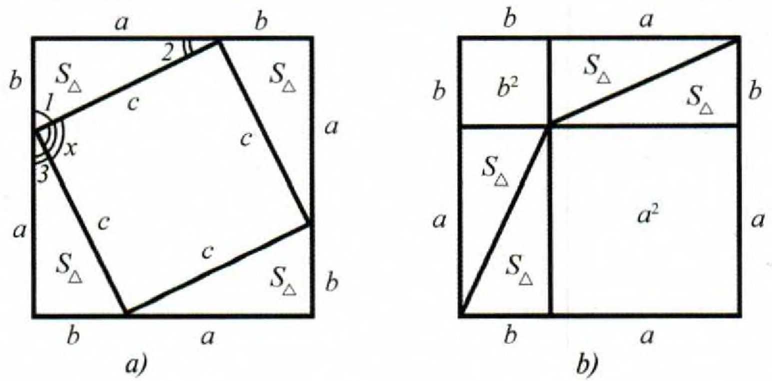
Qaralayotgan ikkala kvadrat tengdosh. Shuningdek, birinchi kvadrat yuzi $4S_\Delta + c^2$ ga teng, ikkinchi kvadratning yuzi $4S_\Delta + a^2 + b^2$ ga teng. Shuning uchun

$$\underline{4S_\Delta} + \underline{\underline{c^2}} = \underline{4S_\Delta} + \underline{\underline{a^2 + b^2}}.$$

Demak,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Teorema isbotlandi.



120- rasm.

Savol, masala va topshiriqlar

305. 1) Pifagor teoremasining ifodasini bilasizmi? Uni isbotlang.
2) Nima uchun isbotlashda foydalanilgan ikkita kvadrat tengdosh?

306. Teng yonli uchburchakning tomonlari: 1) 6 sm, 5 sm va 5 sm; 2) 14 sm, 24 sm va 24 sm; 3) 18 dm, 40 sm va 40 sm; 4) 22 sm, 60 sm va 60 sm; 5) 24 dm, 35 sm va 35 sm ga teng. Shu uchburchakning yuzini va yon tomoniga o'tkazilgan balandlikni toping.

307. Teng yonli ABC uchburchakda AC — asos, BD — balandlik. Agar: 1) $AC = 16$ sm, $BD = 6$ sm; 2) $AC = 48$ sm, $BD = 7$ sm bo'lsa, shu uchburchakning yuzini va yon tomonini toping.

308. To'g'ri burchakli trapetsiyaning yon tomonlari 15 sm va 9 sm, katta asosi esa 20 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

309. O'tkir burchakli ABC uchburchakda BP — balandlik. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AP$ ekanini isbotlang.

310. To'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi $c = 25$ va kateti $a = 7$ ga teng. Gipotenuzaga tushirilgan balandlikni toping.

Yechish. 1) To'g'ri burchakli uchburchakning ikkinchi kateti b bo'lsin, u holda Pifagor teoremasiga ko'ra:

$$b = \sqrt{c^2 - ...^2} = \sqrt{...^2 - 7^2} = \sqrt{625 - ...} = \sqrt{...} = ...$$

2) To'g'ri burchakli uchburchakning yuzi $S = \frac{1}{2}a\ ...$ ga, ikkinchi tomondan esa $S = \frac{1}{2}c\ ...$ ga teng, shuning uchun $a... = c...$ va bundan, $h_c = \frac{a \cdot ...}{c} = \frac{... \cdot 24}{...} = ...$. *Javob*: ... kv. birlik.

311. To'g'ri burchakli trapetsiyaning asoslari 9 sm va 18 sm, katta yon tomoni esa 15 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

312. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakda: 1) agar $AB = 15$ va $AC = 39$ bo'lsa, AD ni; 2) agar $CD = 2,5$ va $AC = 6,5$ bo'lsa, BC ni toping.

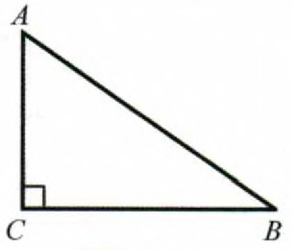
28-mavzu. PIFAGOR TEOREMASINING BA'ZI NATIJALARI. PIFAGOR TEOREMASIGA TESKARI TEOREMA

1. Pifagor teoremasining ba'zi natijalari. Pifagor teoremasining natijalari ichidan ikkitasini ko'rib chiqamiz.

1-natija. ***To'g'ri burchakli uchburchakda katetlardan istalgani gipotenuzadan kichikdir.***

I s b o t . ΔABC — to‘g‘ri burchakli, unda $\angle C = 90°$ bo‘lsin (121- rasm).

To‘g‘ri burchakli uchburchakning istalgan kateti gipotenuzasidan kichik bo‘lishini isbotlaymiz.



121- rasm.

Haqiqatan ham, Pifagor teoremasiga ko‘ra katetlar uchun:

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 \text{ va } BC^2 = AB^2 - AC^2.$$

munosabatlar o‘rinli. Bundan

$$AC^2 < AB^2 \text{ va } BC^2 < AB^2$$

kelib chiqadi.

Demak, $AC < AB$ va $BC < AB$.

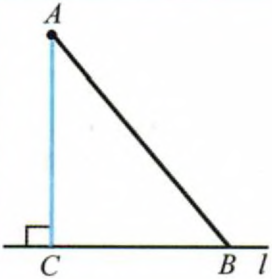
To‘g‘ri burchakli uchburchakning istalgan kateti gipotenuzadan kichik.

X u l o s a . Agar l to‘g‘ri chiziq va unda yotmagan A nuqta berilgan bo‘lsa, A dan l to‘g‘ri chiziqqacha eng qisqa masofa A dan l ga tushirilgan *perpendikular* bo‘ladi (122- rasm).

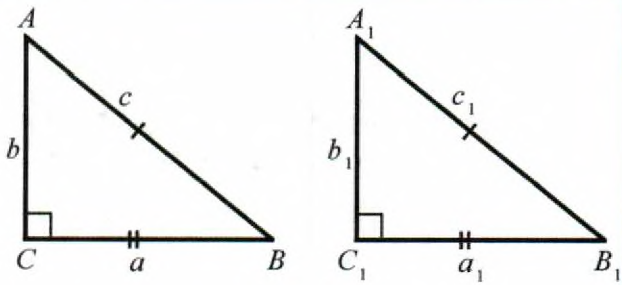
Haqiqatan ham, har qanday $B \in l$ uchun ΔACB — to‘g‘ri burchakli hamda AC katet va AB gipotenuza bo‘ladi. Shuning uchun har doim $AB > AC$.

2- n a t i j a . (Gipotenuzasi va bir katetiga ko‘ra tenglik alomati.) ***To‘g‘ri burchakli bir uchburchakning gipotenuzasi va bir kateti ikkinchi to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi va bir katetiga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar teng bo‘ladi.***

I s b o t . To‘g‘ri burchakli ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda gipotenuzalari ($c = c_1$) va katetlaridan biri ($a = a_1$) teng bo‘lsin (123- rasm). $b^2 = c^2 - a^2$ va $b_1^2 = c_1^2 - a_1^2$ ekanidan, $b^2 = b_1^2$ kelib chiqadi. Shuning uchun $b = b_1$ bo‘ladi.



122- rasm.



123- rasm.

Shunday qilib, uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra, ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar teng ekan.

2. Pifagor teoremasiga teskari teorema.

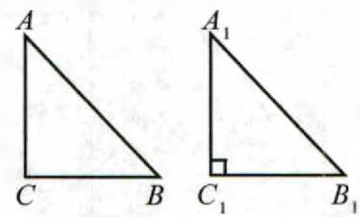
Teorema.

Agar uchburchakda tomonlardan birining kvadrati uning qolgan ikki tomoni kvadratlarining yig'indisiga teng bo'lsa, u holda uchburchak to'g'ri burchakli bo'ladi.

Isbot. ABC uchburchakda $AB^2 = AC^2 + BC^2$ bo'lsin. $\angle C = 90°$ ekanini isbotlaymiz (124- rasm).

C_1 burchagi to'g'ri bo'lgan yordamchi to'g'ri burchakli $A_1B_1C_1$ uchburchakni ko'rib chiqamiz, unda $A_1C_1 = AC$ va $B_1C_1 = BC$. Pifagor teoremasiga ko'ra $A_1B_1^2 = A_1C_1^2 + B_1C_1^2$, va demak, $A_1B_1^2 = AC^2 + BC^2$.

Ammo teorema shartiga ko'ra $AB^2 = AC^2 + BC^2$, va demak, $A_1B_1^2 = AB^2$. Bundan topamiz: $A_1B_1 = AB$. Shunday qilib, ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar uch tomoniga ko'ra teng. Shuning uchun $\angle C = \angle C_1$, ya'ni ABC uchburchakning C uchidagi burchagi to'g'ri burchak ekani kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.



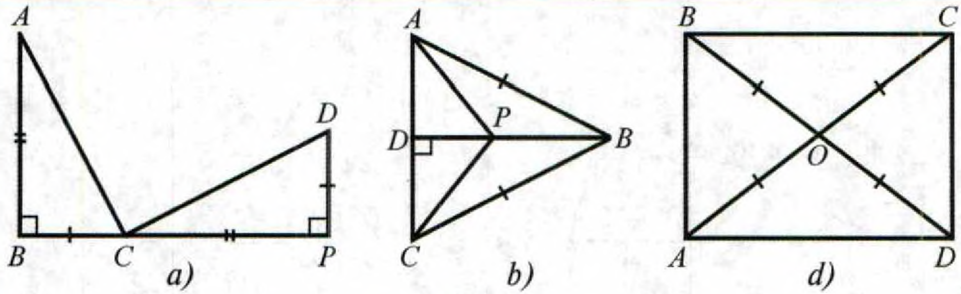
124- rasm.

Savol, masala va topshiriqlar

313. 1) Katet gipotenuzadan kichik ekani to'g'rimi?

2) Pifagor teoremasiga teskari teoremani ifodalang.

314. 125- rasmdan bir juft teng to'g'ri burchakli uchburchaklarni ko'rsating.



125- rasm.

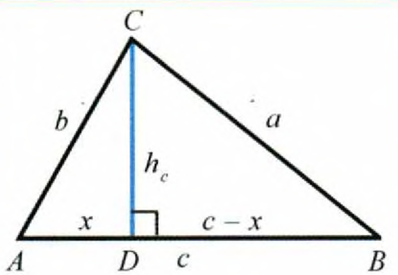
315. To‘g‘ri burchakli uchburchakning: 1) tomonlari biror musbat songa ko‘paytirilsa; 2) har bir tomoniga 1 qo‘shilsa, hosil bo‘lgan kesmalar to‘g‘ri burchakli uchburchakning tomonlari bo‘ladimi?

316. Kateti va ikkinchi katetga o‘tkazilgan medianasiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning tengligini isbotlang.

317. Kateti va shu katetga o‘tkazilgan medianasiga ko‘ra to‘g‘ri burchakli uchburchaklarning tengligini isbotlang.

318. Uchburchakning tomonlari: 1) $a = 12$, $b = 35$, $c = 37$; 2) $a = 11$, $b = 20$, $c = 25$. Shu uchburchaklar to‘g‘ri burchaklimi?

29- mavzu. TOMONLARIGA KO‘RA UCHBURCHAKNING BALANDLIGINI TOPISH



126- rasm.

Berilgan ABC uchburchakning tomonlari a, b va c bo‘lsin. Uning C uchidan AB tomoniga tushirilgan $CD = h_c$ balandlikni topamiz (126- rasm).

Balandlik asosi D nuqtaning AB kesmaga nisbatan qanday joylashishiga qarab, uch hol bo‘ladi.

1- hol. D nuqta AB kesmaning ichki nuqtasi bo‘lsin. Agar $AD = x$ belgilash kiritsak, u holda $DB = c - x$ bo‘ladi. ΔADC va ΔBDC lar to‘g‘ri burchakli, Pifagor teoremasiga ko‘ra:

$$h_c^2 = b^2 - x^2 \ (1) \text{ va } h_c^2 = a^2 - (c - x)^2 \ (2).$$

Bulardan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2.$$

Bu tenglikdan

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2, \text{ ya'ni } b^2 = a^2 - c^2 + 2cx.$$

Bundan x ni topamiz:

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c} \quad \text{yoki} \quad x^2 = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

x^2 ning bu qiymatini (1) tenglikka qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{4c^2}.$$

Bu kasrning suratini ko'paytuvchilarga ajratib, quyidagini hosil qilamiz:

$$h_c^2 = \frac{\left(2bc-\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)\left(2bc+\left(b^2+c^2-a^2\right)\right)}{4c^2} = \frac{\left(2bc-b^2-c^2+a^2\right)\left(2bc+b^2+c^2-a^2\right)}{4c^2}.$$

Hosil qilingan ifodaning suratidagi ikkala ko'paytuvchining shaklini o'zgartiramiz:

$$2bc - b^2 - c^2 + a^2 = a^2 - (b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$$

va

$$2bc + b^2 + c^2 - a^2 = (b+c)^2 - a^2 = (b+c-a)(b+c+a).$$

U holda

$$h_c^2 = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4c^2},$$

bundan

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)}.$$

Uchburchakning yarim perimetrini p deb belgilasak, unda:

$a+b+c=2p$,
$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$,
$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$,
$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a)$.

Hosil qilingan ifodani ildiz ostidagi ifoda o'rniga qo'yib, ega bo'lamiz:

$$h_c = \frac{1}{2c}\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2c}\cdot 4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

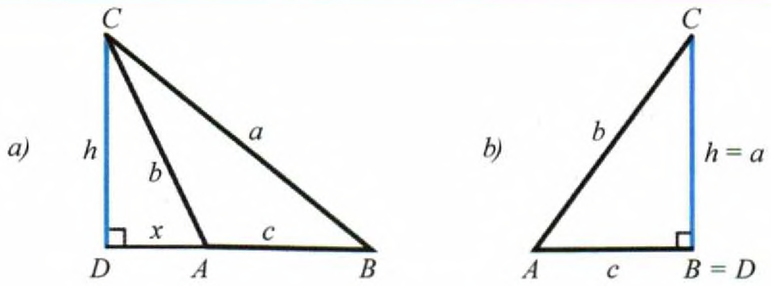
$$= \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Xuddi shuningdek,

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ va } h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

2-hol. D nuqta AB ning davomida yotadi, ya'ni $DB = c + x$. Bunda ham qayd qilingan natija hosil bo'ladi (127- *a* rasm).

3-hol. D nuqta B nuqta bilan, ya'ni, $h = a$, balandlik katet bilan ustma-ust tushadi. Uchburchak to'g'ri burchakli bo'ladi (127- *b* rasm).



127- rasm.

Savol, masala va topshiriqlar

319. Tomonlari: 1) 10 sm, 10 sm, 12 sm; 2) 17 dm, 17 dm, 16 sm; 3) 4 dm, 13 dm, 15 sm bo‘lgan uchburchakning balandliklarini toping.

320. Uchburchakning tomonlari: 1) $a = 5$ sm, $b = 7$ sm, $c = 6$ sm; 2) $a = 13$ dm, $b = 14$ dm, $c = 15$ dm; 3) $a = 24$ sm, $b = 25$ sm, $c = 7$ sm ga teng. Katta tomonga tushirilgan balandlikni toping.

321. 1) Agar teng tomonli uchburchakning tomoni 12 sm ga teng bo‘lsa, uning balandligini; 2) agar teng tomonli uchburchakning balandligi 16 sm ga teng bo‘lsa, uning tomonini toping.

322. Balandligi h ga teng bo‘lgan teng tomonli uchburchakning tomonini toping.

323. Uchburchakning tomonlari 16 sm, 12 sm va 8 sm ga teng. Shu uchburchakning kichik balandligini toping.

324. Uchburchakning tomonlari 8 sm, 10 sm va 12 sm ga teng. Shu uchburchakning eng katta va eng kichik balandliklarini toping.

325. Tomonlari: 1) 17, 65, 80; 2) 8, 6, 4; 3) 24, 25, 7; 4) 30, 34, 16; 5) 15, 17, 8 ga teng bo‘lgan uchburchakning kichik balandligini toping.

30- mavzu. UCHBURCHAK YUZI UCHUN GERON FORMULASI

Ma’lumki, uchburchakning yuzi uning asosi bilan balandligi ko‘paytmasining yarmiga teng:

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c .$$

Balandlik o'rniga uning uchburchak tomonlari orqali ifodasini qo'yib hamda soddalashtirib, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Bu formula milodning I asrida yashagan qadimgi yunon olimi iskandariyalik **Geron** tomonidan topilgan bo'lib, u *Geron formulasi* deb ataladi.

Geron formulasi uchburchakning uchala tomoni uzunligi ma'lum bo'lganda uning yuzini hisoblash uchun ishlatiladi.

Savol, masala va topshiriqlar

326. Uchburchakning yuzi uchun Geron formulasini keltirib chiqaring. Uchburchakning yuzini yana qanday formulalar yordamida hisoblash mumkin? Ularning ifodasini keltiring.

327. Uchta tomoniga ko'ra uchburchakning yuzini toping:
1) 17, 65, 80; 2) 15, 15, 18; 3) 4, 13, 15; 4) 29, 25, 6.

328. Rombning tomoni 26 sm ga, diagonallaridan biri esa 48 sm ga teng. Shu rombning yuzini toping.

329. Teng tomonli uchburchakning yuzi $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ formula bo'yicha hisoblanadi, bunda a — uchburchakning tomoni. Shuni isbotlang.

330. Teng tomonli uchburchakning tomoni: 1) 15 sm; 2) 3,2 dm; 3) 20 sm; 4) $4\sqrt{2}$ sm; 5) 6 sm. Uchburchakning yuzini toping.

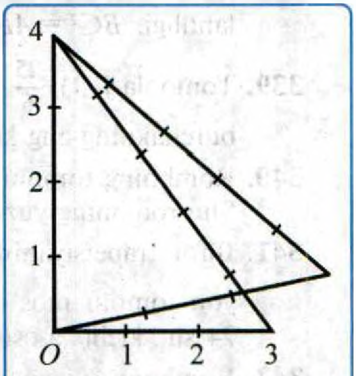
331. Tomonlari: 1) 39, 42, 45; 2) 35, 29, 8; 3) 8, 10, 14; 4) 45, 39, 12; 5) 20, 20, 32 ga teng bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

31- mavzu. MASALALAR YECHISH

Ushbu mavzuda Pifagor teoremasiga bog'liq amaliy masalani ko'rib chiqamiz.

Masala. Ustunni tik o'rnatish.

Yechish. Pifagor teoremasi amaliy masalalarni hal qilishda juda ko'p ishlatiladi. Ushbu masala ham shular jumlasidandir. Buning uchun 3, 4 va 5 Pifagor uchligidan foydalanamiz. Bu sonlar uchun $3^2 + 4^2 = 5^2$ tenglik o'rinli. Bundan katetlari 3 va 4 uzunlik birligiga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 5 birlikka teng bo'ladi.



128- rasm.

Ustunni tik o'rnatish uchun ustun uzunligini ip bilan o'lchaymiz. So'ngra bu ipni ikki marta teng ikkiga bo'lamiz. Bunda ustunga nisbatan bir uzunlik birligini hosil qilamiz. Ustun esa to'rt birlikka teng bo'ladi. Ustun asosidan boshlab uch birlik o'lchaymiz va bu nuqtadan ustun uchigacha masofani o'lchaymiz. Agar bu masofa besh birlikka teng bo'lsa, ustun tekislikka nisbatan tik turgan bo'ladi. Faqat bu ishni kamida ikki yo'nalishda bajarish lozim (128- rasm).

Savol, masala va topshiriqlar

332. 1) Ustunning tik ekani qanday tekshiriladi?
2) Tomonlari 5, 6 va 9 birlikka teng bo'lgan uchburchakning yuzini toping.

333. Teng yonli trapetsiyaning diagonali 25 sm ga, balandligi esa 15 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

334. $ABCD$ kvadratning tomoni 12 sm ga teng. Uning AB tomonida P nuqta shunday belgilanganki, unda $PC = 13$ sm. $APCD$ to'rtburchakning yuzini toping.

335. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning BC tomonida P nuqta shunday belgilanganki, unda $AP = 15$ sm, $BA = 12$ sm, $PC = 6$ sm. $APCD$ to'rtburchakning yuzini toping.

336. Uchburchakning balandligi 36 sm, yon tomoni 85 sm va 60 sm. Shu uchburchakning yuzini toping (ikki holni ko'ring).

337. To'g'ri to'rtburchakning tomonlari 8 sm va 15 sm. Uning diagonalini toping.

5- § ga doir qo'shimcha mashqlar

338. ABC uchburchakda A burchak o'tmas, BP — uchburchakning balandligi. $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AP \cdot AC$ ekanini isbotlang.

339. Tomonlari: 1) $\frac{25}{6}$, $\frac{25}{6}$, 6; 2) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$ ga teng bo'lgan uchburchakning eng katta balandligini toping.

340. Rombning tomoni 20 sm ga, diagonallaridan biri esa 24 sm ga teng. Shu rombning yuzini toping.

341. Biror trapetsiyaning o'tmas burchagi uchidan chiqqan diagonali va yon tomoni mos ravishda 26 sm va $\sqrt{577}$ sm ga, uning balandligi 24 sm, kichik asosi esa 7 sm ga teng. Trapetsiyaning yuzini toping.

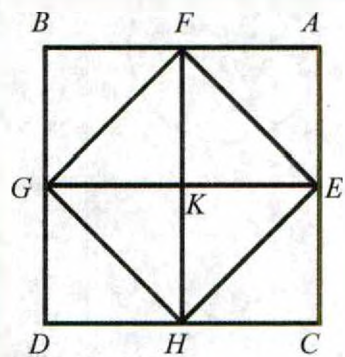
342. Rombning diagonallari 18 sm va 24 sm. Rombning perimetrini va parallel tomonlar orasidagi masofani toping.

5- TEST

1. To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlaridan biri 12 sm, gipotenuzasi esa ikkinchi katetdan 6 sm uzun. Gipotenuzaning uzunligini toping.
A) 15; B) 25; C) 26; D) 18.
2. To‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 25 sm, katetlari o‘zaro 3 : 4 nisbatda. Shu uchburchakning kichik katetini toping.
A) 10; B) 15; C) 9; D) 20.
3. To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlaridan biri 12 sm, ikkinchisi esa gipotenuzadan 8 sm qisqa. Shu uchburchakning gipotenuzasini toping.
A) 15; B) 16; C) 13; D) 25.
4. Tomonlari 13, 14 va 15 sm bo‘lgan uchburchakning eng kichik balandligi necha santimetr?
A) 11,5; B) 11,1; C) 11; D) 11,2.
5. Katetlari 3 va 4 ga teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga tushirilgan balandligini toping.
A) 2; B) 3; C) 2,5; D) 2,4.

Tarixiy ma’lumotlar

«*Bilki,* – deb yozadi Xorazmiy, – *har bir to‘g‘ri burchakli uchburchak shundayki, agar kichik tomonlarining har biri o‘z-o‘ziga ko‘paytirilsa va bu ko‘paytmalar qo‘shilsa, bu katta tomonining o‘z-o‘ziga ko‘paytmasiga teng bo‘ladi*». Buni isbotlash uchun Xorazmiy *ABDC* kvadrat shakl yasaydi (129- rasm). Uning *AC* tomonini *E* nuqtada teng ikkiga bo‘lib, unga *EG* perpendikular o‘tkazadi. *AB* ni *F* nuqtada teng ikkiga bo‘lib, unga *FH* perpendikular o‘tkazadi. U holda *ABDC* shakl to‘rtta o‘zaro teng shakllardan iborat bo‘ladi. So‘ngra *EF*, *FG*, *GH*, *HE* chiziqlarni o‘tkazib, sakkizta o‘zaro teng uchburchaklar hosil qiladi. *AF* chiziqning o‘z-o‘ziga ko‘paytmasi bilan *AE* chiziqning o‘z-o‘ziga ko‘paytmasi birgalikda to‘rtta o‘zaro teng uchburchaklar yuzlarini hosil qiladi. *FE* chiziqning o‘z-o‘ziga ko‘paytmasi ham xuddi shunday o‘zaro teng uchburchaklar yuzlarini tashkil etadi. Isbot ana shundan iborat.



129- rasm.

6- §. AYLANA

32- mavzu. AYLANA. MARKAZIY BURCHAK

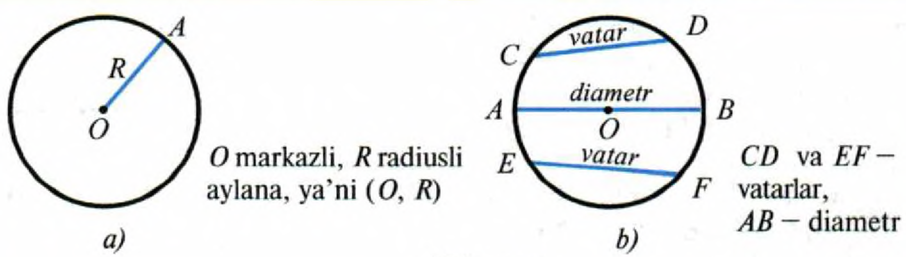
1. Ayalana haqida boshlang‘ich ma’lumotlar.

Ta’rif. *Tekislikning berilgan nuqtadan bir xil masofaga uzoqlashgan barcha nuqtalaridan iborat shakl* ***aylana*** *deyiladi.*

Aylana tekislikda berilgan O nuqtadan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalardan tuzilgan. Berilgan O nuqta *aylananing markazi* deyiladi.

Aylananing ixtiyoriy nuqtasini uning markazi bilan tutashtiruvchi kesma aylananing *radiusi* deyiladi. Aylana nuqtasini uning markazi bilan tutashtiruvchi har qanday kesma ham radius bo‘ladi. Odatda, O markazli va R radiusli aylana quyidagicha belgilanadi: (O, R) (130- *a* rasm).

Aylananing ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma *vatar* deyiladi. Aylananing markazidan o‘tuvchi vatar uning *diametri* deyiladi (130- *b* rasm).

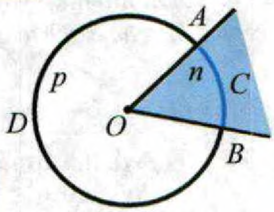


130- rasm.

2. Markaziy burchak.

Ta’rif. *Uchi aylananing markazida bo‘lgan burchak* ***markaziy burchak*** *deb ataladi.*

Umumiy uchi aylananing O markazida bo'lgan ikki nur OA va OB ikkita markaziy burchakni belgilaydi. Aylananing ikki nuqtasi unda ikki yoyni belgilaydi. Bu yoylarni bir-biridan farq qilish uchun har birida bittadan oraliq nuqta (yoyning uchlaridan farqli) yoki lotincha kichik harf bilan belgilanadi hamda ACB (yoki AnB) va ADB (yoki ApB) yoylar haqida gapiriladi (131- rasm). Bu yoylarni bunday belgilash qabul qilingan: $\smile ACB$ (yoki $\smile AnB$) va $\smile ADB$ (yoki $\smile ApB$). Ayrim hollarda yoy oraliq nuqtasiz belgilanadi: $\smile AB$ (ikki yoydan qaysi biri haqida gap ketayotgani tushunarli bo'lganda).



$\angle AOB$ – markaziy burchak

131- rasm.

Agar yoyning uchlarini tutashtiruvchi kesma aylana diametri bo'lsa, yoy *yarim aylana* deyiladi. 132-*b* rasmda ikkita yarim aylana tasvirlangan, ulardan biri alohida ajratib ko'rsatilgan.

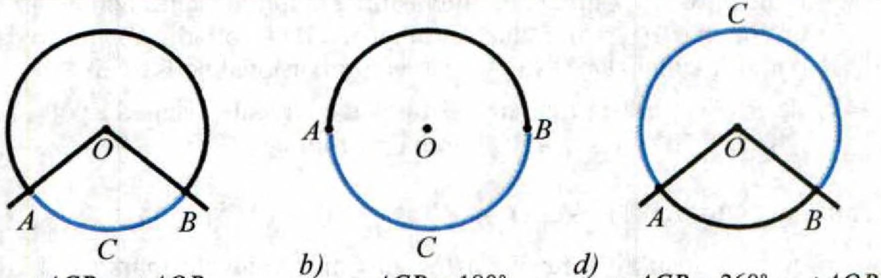
3. Aylana yoyining burchak kattaligi.

Ta'rif. *Aylana yoyining burchak kattaligi deb aylananing shu yoyga mos markaziy burchagining kattaligiga aytiladi.*

Aylana yoyini graduslarda o'lchash mumkin. *Agar O markazli aylananing ACB yoyi yarim aylanadan kichik yoki yarim aylanaga teng bo'lsa, u holda uning gradus o'lchovi AOB markaziy burchak gradus o'lchoviga teng hisoblanadi* (132-*a*, *b* rasm). *Agar ACB yoy yarim aylanadan katta bo'lsa, u holda uning gradus o'lchovi* $360° - \angle AOB$ *ga teng hisoblanadi* (132-*d* rasm).

Bundan, *oxirlari umumiy bo'lgan aylana ikki yoyining gradus o'lchovlari yig'indisi* $360°$ *ga tengligi* kelib chiqadi.

Ma'lumki, ikki burchakning kattaliklari teng bo'lganda va faqat shundagina u burchaklar teng bo'ladi.



a) $\smile ACB = \angle AOB$ *b)* $\smile ACB = 180°$ *d)* $\smile ACB = 360° - \angle AOB$

132- rasm.

Aylana ikki yoyining burchak kattaliklari (ya'ni ularga mos markaziy burchaklar) teng bo'lganda va faqat shundagina bu yoylar teng bo'ladi.

Savol, masala va topshiriqlar

343. 1) Aylana nima? Uning markazi, radiusi nima?

2) Aylananing vatari nima? Qanday vatar diametr deb ataladi?

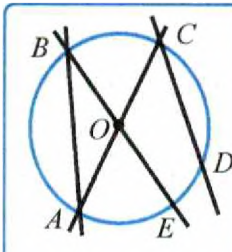
3) Markaziy burchak nima?

4) Aylana yoyi qanday belgilanadi? Aylana yoyining burchak kattaligi nima?

344. O markazli aylananing qaysi burchaklari markaziy bo'ladi (133- rasm)?

Yechish. Aylanada *markaziy* ... deb uchi ... bo'lgan yassi burchakka aytiladi. Rasmda aylananing markazi – ... nuqta AOC, ..., ..., ..., ..., ... burchaklarning uchidir. Bu burchaklar berilgan ... markaziy burchaklari bo'ladi.

Javob: ..., ..., ..., ..., ..., ...



133- rasm.

345. 1) Berilgan aylana yoyini teng ikkiga qanday qilib bo'lish kerak?

2) Aylanani to'rtta teng yoyga qanday qilib bo'lish kerak?

346. Berilgan aylananing markazidan o'tuvchi ikki to'g'ri chiziq bu aylanada nechta yoyni va nechta markaziy burchaklarni aniqlaydi?

347. Markaziy burchakka mos yoy aylananing: 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{4}{15}$; 3) $\frac{7}{12}$; 4) $\frac{5}{9}$; 5) $\frac{13}{18}$; 6) $\frac{17}{20}$; 7) $\frac{23}{30}$ qismiga teng. Shu markaziy burchakni toping.

348. Aylana ikki nuqta bilan ikki yoyga bo'linadi. Agar: 1) ulardan birining burchak kattaligi ikkinchisining burchak kattaligidan 40° ortiq bo'lsa, har qaysi burchak kattaligi qanday bo'ladi? 2) bu yoylarning burchak kattaliklari 2 va 7 sonlariga proporsional bo'lsa-chi?

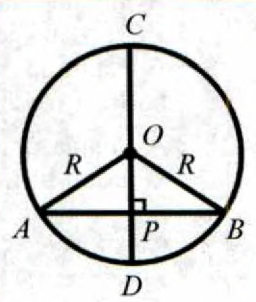
349. A, B, C nuqtalar markazi O nuqtada bo'lgan aylanada yotadi. Agar $\smile ABC = 70°$ bo'lsa, AOC burchakni toping.

350. Aylananing: 1) $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{10}$; 5) $\frac{1}{12}$; 6) $\frac{1}{18}$; 7) $\frac{1}{45}$ qismini tashkil qiluvchi AB yoyiga mos keluvchi markaziy burchaklar necha gradusli bo'ladi? Bu hollarning har birida AB yoyning burchak kattaligini belgilar yordamida yozing.

33- mavzu. AYLANA VATARI VA DIAMETRINING XOSSALARI

1- teorema.

Vatarga perpendikular diametr shu vatarni va unga tiralgan yoyni teng ikkiga bo'ladi.



134- rasm.

Isbot. Markazi O nuqtada va radiusi R bo'lgan aylana berilgan. AB – aylana vatari va CD – vatarga perpendikular diametr bo'lsin (134- rasm). $AP = PB$ va $\smile AD = \smile DB$ ekanini isbot qilishimiz kerak. Buning uchun OA va OB radiuslarni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan AOB – teng yonli uchburchak, chunki $OA = OB = R$.

Demak, OP – teng yonli uchburchak uchidan AB asosga tushirilgan balandlik. Shuningdek, u uchburchakning medianasi va bissektrisasi bo'ladi. OP – mediana bo'lgani uchun $AP = PB$. Uning bissektrisa ekanidan $\angle AOP = \angle BOP$ ni hosil qilamiz. Bu burchaklar tiralgan yoylar bo'lgani uchun $\smile AD = \smile DB$. Teorema isbot bo'ldi.

2- teorema.

Aylana vatari uning diametridan katta bo'lmaydi.

Isbot. OPB uchburchak – to'g'ri burchakli (134- rasmga q.). Bu uchburchakda OB – gipotenuza, PB – katet. Ma'lumki, katet gipotenuzadan katta emas, ya'ni $PB \leqslant OB$. Bundan esa $2PB \leqslant 2 \cdot OB$ hamda $2PB = AB$ va $2OB = 2R = d$ ekanidan $AB \leqslant d$ kelib chiqadi.

1- natija. *Vatarning o'rtasidan o'tuvchi diametr shu vatarga perpendikulardir.*

2- natija. *Vatarning o'rta perpendikulari aylananing diametri bo'ladi.*

Savol, masala va topshiriqlar

351. 1) Vatarga perpendikular diametr qanday xossaga ega?
2) Aylana vatari diametrdan katta emasligini isbotlang.

352. 8 sm li vatar aylanadan 90° li yoy ajratadi. Aylana markazidan vatargacha bo'lgan masofani toping.

353. Aylana ichida berilgan nuqtadan shu nuqtada teng ikkiga bo'linadigan vatar o'tkazing.

354. Aylanada undan 90° li yoy ajratuvchi ikkita parallel vatar o'tkazilgan. Ulardan birining uzunligi 8 sm. Vatarlar orasidagi masofani toping.

355. 1) Aylananing markazidan boshqa nuqtada kesishuvchi ikki vatari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linmasligini isbotlang.

2) Aylananing AA_1 diametri BB_1 vatarga perpendikular. AB va AB_1 yoylarning gradus o'lchovi yarim aylanadan kichik va teng ekanini isbotlang.

356. Aylanadagi A nuqtadan aylananing radiusiga teng ikki vatar AB va AC o'tkazilgan. B va C nuqtalar to'g'ri chiziq bilan tutashtirilgan. Aylananing radiusi 12 sm. Aylananing markazidan BC vatargacha bo'lgan masofani toping.

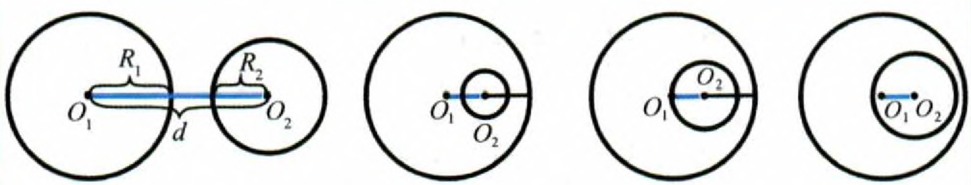
357. Aylanada undan 90° li yoy ajratuvchi ikkita parallel vatar o'tkazilgan. Ulardan birining uzunligi 10 sm. Vatarlar orasidagi masofani toping.

34- mavzu. IKKI AYLANANING O'ZARO JOYLASHISHI

Ma'lumki, aylananing markazi va radiusi berilgan bo'lsa, u holda yagona aylana chizish mumkin. Shuning uchun aylana o'z markazi va radiusi bilan to'la aniqlanadi. Agar ikkita aylana berilsa-chi, ya'ni ikki aylana markazlari va radiuslariga qarab o'zaro qanday joylashishi mumkin? Bu masalaning mumkin bo'lgan barcha hollarini ko'rib chiqamiz.

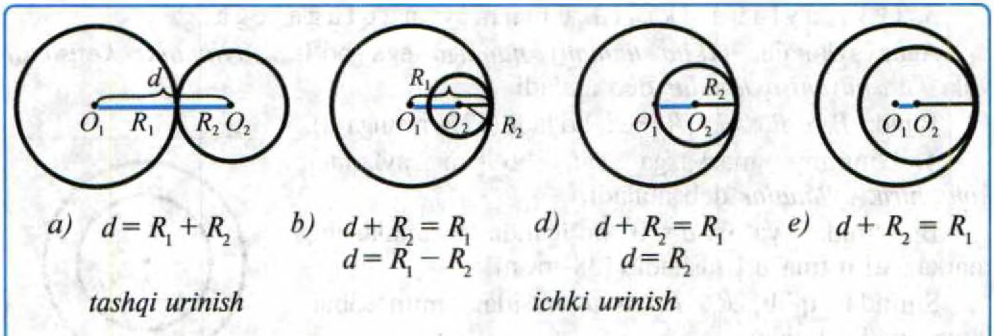
Tekislikda ikki aylana (O_1, R_1) va (O_2, R_2) tasvirlangan, deylik. Aylanalarning O_1 va O_2 markazlari orasidagi masofa $O_1O_2 = d$, $R_2 < R_1$ bo'lsin. Endi birinchi aylana suriladi, bunda O_1 va O_2 markazlari orasidagi masofa o'zgarishiga qarab, quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1. Ikki aylana umumiy nuqtaga ega emas, ya'ni *aylanalar kesishmaydi*. Bunda ham radiuslar kattaligiga qarab, bir necha hollar bo'ladi (135- rasm).



$d > R_1 + R_2$ a) $d + R_2 < R_1$ b) $d = R_2$ d) $d < R_2$ e)

135- rasm.



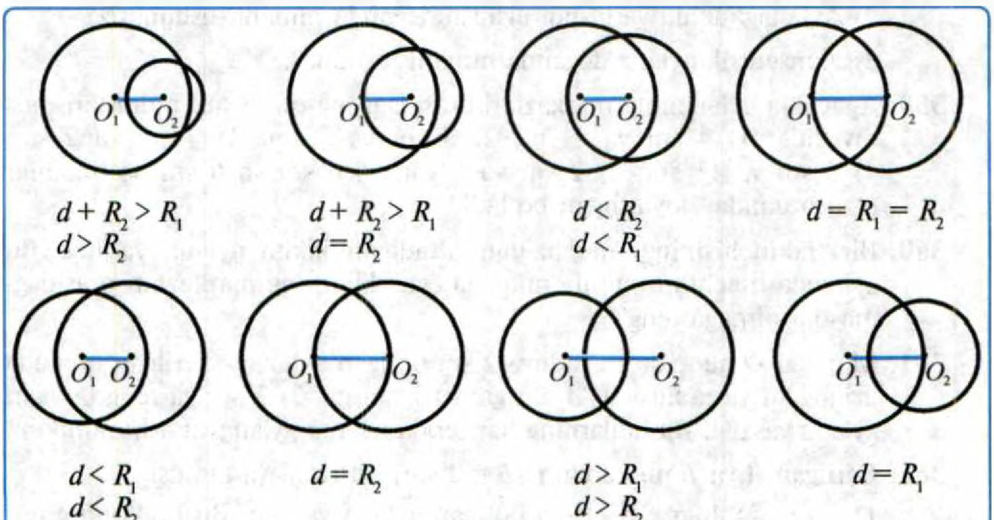
136- rasm.

2. Ikki aylana bitta umumiy nuqtaga ega.

Agar aylanalar bitta umumiy nuqtaga ega bo'lsa, aylanalar bir-biriga *urinadi* deb ataladi. Ularning umumiy nuqtasi *urinish nuqtasi* deyiladi.

Agar aylanalarning markazlari ularning umumiy urinish nuqtasidan turli tomonda yotsa, ya'ni markazlar orasidagi masofa radiuslar yig'indisiga teng ($d = R_1 + R_2$) bo'lsa, ular *tashqi tomondan urinadi* deyiladi (136-*a* rasm).

Agar aylanalarning markazlari ularning umumiy urinish nuqtasidan bir tomonda yotsa, ya'ni markazlar orasidagi masofa radiuslar ayirmasiga teng ($d = R_1 - R_2$, yoki $d + R_2 = R_1$) bo'lsa, ular *ichki tomondan urinadi* deyiladi (136-*b*, *d*, *e* rasm). Bunda kichik radiusli aylananing urinish nuqtasidan boshqa hamma nuqtalari katta radiusli aylananing ichki sohasiga joylashgan bo'ladi.



137- rasm.

3. Ikki aylana ikkita umumiy nuqtaga ega.

Agar aylanalar *ikkita umumiy nuqtaga* ega bo'lsa, *aylanalar kesishadi* yoki *kesishuvchi aylanalar* deb ataladi.

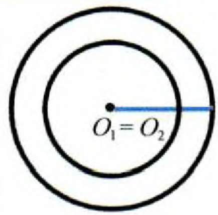
Bunda $R_1 - R_2 < d < R_1 + R_2$ bo'ladi (137- rasmga q).

4. Umumiy markazga ega bo'lgan aylanalar *konsentrik aylanalar* deb ataladi.

Bu holda, ya'ni $d = 0$ bo'lganda aylanalarning markazlari ustma-ust tushadi (138- rasm).

Shunday qilib, R_1, R_2 va d orasidagi munosabatlarga bog'liq holda:

ikki aylana umumiy nuqtaga ega bo'lmasligi, bir yoki ikki umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin.



138- rasm.

Teorema.

Kesishuvchi aylanalarning kesishish nuqtalarini tutashtiruvchi vatar shu aylanalarning markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulardir.

O'zingiz mustaqil isbot qiling.

Savol, masala va topshiriqlar

358. 1) Aylanalar berilgan nuqtada urinadi, degani nimani bildiradi?

2) Aylanaga ichki va tashqi urinish deganda nimani tushunasiz?

3) Konsentrik aylana deganda nimani tushunasiz?

359. Agar ikki aylananing markazlari orasidagi masofa 6 sm, radiuslari mos ravishda: 1) 4 sm va 2 sm; 2) 3 sm va 5 sm; 3) 3 sm va 2 sm; 4) 5 sm va 11 sm; 5) 2 sm va 6 sm; 6) 6 sm va 6 sm bo'lsa, ular o'zaro qanday joylashgan bo'ladi?

360. Biri ikkinchisining markazidan o'tadigan ikkita aylana yasang. Bu aylanalar nechta umumiy nuqtaga ega? Ularning markazlari orasidagi masofa nimaga teng?

361. Markazi O nuqtada va radiusi 2 sm bo'lgan aylanaga berilgan nuqtada urinuvchi va radiusi: 1) 1 sm ga; 2) 2 sm ga; 3) 3 sm ga teng bo'lgan aylana yasang. Bu hollarning har birida nechta aylana yasash mumkin?

362. Berilgan A va B nuqtadan ($AB = 2$ sm) o'tuvchi va radiusi:

1) 3 sm; 2) 4 sm; 3) 1 sm bo'lgan aylana yasang. Bu hollarning har birida nechta aylana yasash mumkin?

363. Quyidagi hollarda aylanalar bir-biriga nisbatan qanday joylashadi:
1) ularning markazlari orasidagi masofa 30 sm, radiuslari 6 sm va 8 sm;
2) markazlari orasidagi masofa 200 mm, diametrlari 320 mm va 80 mm?

364. Agar ikki aylana (O_1, R_1) va (O_2, R_2) bir-biriga urinsa, u holda urinish nuqtasi shu aylanalar markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi. Shuni isbotlang.

365. Berilgan ikki konsentrik aylanaga urinuvchi aylana yasang. Hamma shunday aylanalar markazlari to'plami qanday shakl bo'ladi?

366. Tashqi urinuvchi ikki aylana radiuslarining nisbati: 1) 3 : 5; 2) 2 : 7; 3) 4 : 5; 4) 5 : 11; 5) 9 : 7; 6) 13 : 3 kabi. Aylanalarning markazlari orasidagi masofa 16 sm. Aylanalarning diametrlarini toping.

367. Ichki urinuvchi ikki aylana radiuslarining nisbati 7 : 4 kabi, ularning markazlari orasidagi masofa 12 sm. Aylanalarning radiuslarini toping.

368. Markazlari umumiy bo'lgan ikki aylanadan kichigi kattasining diametrini 3 sm, 4 sm, 3 sm ga teng uch bo'lakka bo'ladi. Shu ikki aylananing radiuslarini toping.

369. Quyidagi hollarda aylanalar bir-biriga nisbatan qanday joylashadi:
1) ularning markazlari orasidagi masofa 15 sm, radiuslari 3 sm va 8 sm;
2) markazlari orasidagi masofa 100 mm, diametrlari 160 mm va 40 mm;
3) markazlari orasidagi masofa 10 sm, radiuslari 21 sm va 13 mm?

35- mavzu. AYLANAGA URINMA

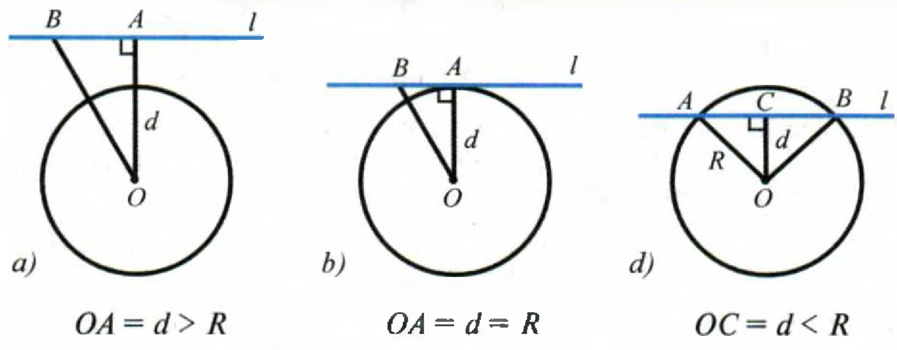
1. To'g'ri chiziq bilan aylananing o'zaro joylashishi. Bu bandda tekislikda to'g'ri chiziq bilan aylananing o'zaro joylashishini ko'rib chiqamiz. Agar to'g'ri chiziq aylana markazidan o'tsa, u holda u aylanani ikki nuqtada, ya'ni bu to'g'ri chiziqda yotuvchi diametr uchlarida kesishishi ravshan.

Berilgan l to'g'ri chiziq bilan (O, R) aylana nechta umumiy nuqtaga ega, degan savolga javob berish uchun aylananing markazi O dan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan d masofani shu aylananing R radiusi bilan taqqoslash kerak.

Aylananing markazidan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikular *aylana markazidan to'g'ri chiziqqacha masofa* deb ataladi.

Uch hol bo'lishi mumkin: 1) $d > R$; 2) $d = R$; 3) $d < R$. Endi bu hollarni ko'rib chiqamiz.

1-hol. *Agar aylananing markazidan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa aylananing radiusidan katta bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan aylana umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi, ya'ni kesishmaydi.*



139- rasm.

Haqiqatan ham, agar $d > R$ bo'lsa (139- *a* rasm), *l* to'g'ri chiziqning *O* markazga eng yaqin nuqtasi (demak, bu to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasi ham) (O, R) aylanaga tegishli bo'lmaydi, chunki u markazdan aylana radiusidan katta masofada bo'ladi.

2-hol. *Agar aylananing markazidan to'g'ri chiziqqacha masofa aylananing radiusiga teng bo'lsa, u holda to'g'ri chiziq bilan aylana bitta va faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'ladi.*

Haqiqatan ham, agar $d = R$ bo'lsa (139- *b* rasm), *l* to'g'ri chiziqning *O* markazga eng yaqin nuqtasi aylananing radiusiga teng masofada bo'ladi, va demak, u nuqta aylanaga ham tegishli bo'ladi. *l* to'g'ri chiziqning qolgan hamma nuqtalari *O* markazdan aylananing radiusidan katta masofada bo'ladi, demak, aylanaga tegishli bo'lmaydi.

3- hol. *Aylananing markazidan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa aylananing radiusidan kichik bo'lsa* ($d < R$), *u holda to'g'ri chiziq bilan aylana ikkita umumiy nuqtaga ega bo'ladi.*

To'g'ri chiziqning aylana ichidagi qismi vatar bo'ladi (139- *d* rasm). Bu holda to'g'ri chiziq aylanaga nisbatan *kesuvchi* deyiladi.

Vatarning uzunligi *AB* ni aylananing radiusi va markazidan to'g'ri chiziqqacha masofa *d* orqali ifodalash mumkin:

$$AB = 2\sqrt{R^2 - d^2}\ .$$

Bu tenglikni o'zingiz isbot qiling.

Xulosa. ***To'g'ri chiziq bilan aylana umumiy nuqtalarga ega bo'lmasligi, bir yoki ikki umumiy nuqtaga ega bo'lishi mumkin.***

2. Aylanaga urinma.

Ta'rif. *Aylana bilan faqat bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan to'g'ri chiziq shu aylanaga* ***urinma*** *deyiladi, ularning umumiy nuqtasi esa* ***urinish nuqtasi*** *deyiladi.*

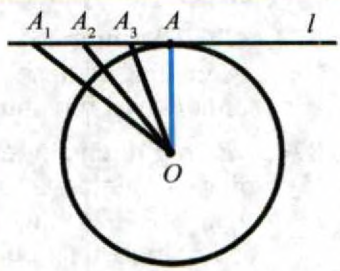
139- *b* rasmda *l* to'g'ri chiziq *O* markazli aylanaga urinma, *A* – urinish nuqtasi. Aylana *l* to'g'ri chiziqqa urinadi deyish ham mumkin.

Urinmaning xossasi haqidagi teoremani isbotlaymiz.

1-teorema.

Aylanaga urinma shu aylananing urinish nuqtasiga o'tkazilgan radiusga perpendikulardir.

Isbot. *l* to'g'ri chiziq aylanaga *A* nuqtada o'tkazilgan urinma bo'lsin (140- rasm). $R = OA$ ning *l* ga perpendikular bo'lishini isbot qilamiz. Shartga ko'ra, *l* to'g'ri chiziqning *A* nuqtasidan boshqa hamma nuqtalari aylanadan tashqarida yotadi. Shuning uchun bu to'g'ri chiziqning *A* dan boshqa har qanday A_1 nuqtasi uchun $OA_1 > OA$. Demak, *OA* masofa *O* nuqtadan *l* to'g'ri chiziqning nuqtalarigacha bo'lgan masofalarning eng qisqasidir. Nuqtadan to'g'ri chiziqqacha eng qisqa masofa esa shu to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikular bo'ladi. Bundan, $OA \perp l$ ekani kelib chiqadi. Teorema isbotlandi.



140- rasm.

Endi urinmaning xossasiga teskari teoremani isbotlaymiz (urinmaning alomati).

2-teorema.

Radiusga perpendikular va uning aylanada yotgan uchidan o'tuvchi to'g'ri chiziq shu aylanaga urinmadir.

Isbot. Agar aylana markazidan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa aylana radiusiga teng ($d = R$) bo'lsa (139- *b* rasmga q.), *l* to'g'ri chiziqning *O* markazga eng yaqin nuqtasi aylananing radiusiga teng bo'ladi, demak, u nuqta aylanaga ham tegishli bo'ladi. *l* to'g'ri chiziqning qolgan hamma nuqtalari *O* markazdan aylananing radiusidan katta masofada bo'ladi, demak, aylanaga tegishli bo'lmaydi. Ta'rifga ko'ra, *l* to'g'ri chiziq shu aylanaga urinma bo'ladi. Teorema isbot bo'ldi.

Savol, masala va topshiriqlar

370. 1) Qanday to‘g‘ri chiziq aylanaga urinma to‘g‘ri chiziq deyiladi?

2) Urinmaning qanday xossasini va alomatini bilasiz?

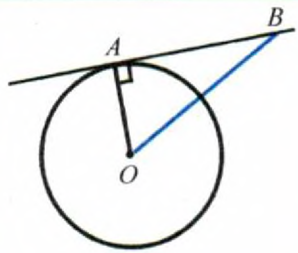
371. d – R radiusli aylananing markazidan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa. Agar: 1) $R=8$ sm, $d=6$ sm; 2) $R=10$ sm, $d=8{,}4$ sm; 3) $R=14{,}4$ dm, $d=7{,}4$ dm; 4) $R=1{,}6$ dm, $d=24$ sm; 5) $R=4$ sm, $d=40$ mm; 6) $R=60$ sm, $d=7$ dm bo‘lsa, l to‘g‘ri chiziq bilan aylana o‘zaro qanday joylashgan bo‘ladi?

372. 1) Berilgan (O, R) aylanaga berilgan A nuqtadan o‘tuvchi nechta urinma o‘tkazish mumkin?

2) Berilgan aylanaga berilgan nuqtadan o‘tuvchi urinma yasang.

373. $ABCD$ kvadratning tomoni 8 sm ga va markazi A nuqtada bo‘lgan aylananing radiusi 7 sm ga teng. AB, BC, CD va BD to‘g‘ri chiziqlardan qaysi biri shu aylanaga nisbatan kesuvchi bo‘ladi?

374. AB to‘g‘ri chiziq O markazli aylananing A nuqtasiga o‘tkazilgan urinma. Agar $AB=24$ sm, aylananing radiusi esa 7 sm ga teng bo‘lsa, OB kesmaning uzunligini toping (141- rasm).



141- rasm.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra AB to‘g‘ri chiziq berilgan aylanaga ..., va demak, u urinish ... o‘tkazilgan OA radiusga ... . Shuning uchun AOB uchburchak – ... . Pifagor teoremasiga ko‘ra: $OB^2 = OA^2 + ...^2 = ...^2 + 24^2 = ...$, bundan $OB = ...$ sm.

Javob: $OB = ...$ sm.

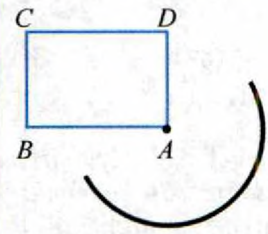
375. Bir aylanaga o‘tkazilgan AB va AC urinmalar orasidagi BAC burchak 60°, BAC siniq chiziqning uzunligi 1 m. B va C urinish nuqtalari orasidagi masofani toping.

376. Radiusi R bo‘lgan aylanadan tashqaridagi nuqtadan shu aylanaga o‘zaro perpendikular ikki urinma o‘tkazilgan. Har qaysi urinmaning uzunligini toping.

377. To‘g‘ri burchakli ACB ($\angle C=90°$) uchburchakda $AB=10$ sm, $\angle ABC=30°$. Markazi A nuqtada bo‘lgan aylana o‘tkazilgan. Bu aylananing radiusi qanday bo‘lganda: 1) aylana BC to‘g‘ri chiziqqa urinadi; 2) u bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi; 3) u bilan ikkita umumiy nuqtaga ega bo'ladi?

378. A nuqtadan aylana markazigacha bo'lgan masofa radiusdan kichik. A nuqta orqali o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq berilgan aylanaga nisbatan kesuvchi bo'lishini isbot qiling.

379. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchak berilgan, unda $AB = 16$ sm, $AD = 12$ sm (142- rasm). AC, BC, CD va BD to'g'ri chiziqlardan qaysi biri radiusi 12 sm li A markazli aylanaga urinma bo'ladi?



142- rasm.

Yechish. Aylana bilan faqat ... nuqtaga ega bo'lgan ... shu ... urinma deyiladi. Agar ... markazidan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa aylana ... teng bo'lsa, to'g'ri chiziq bilan aylana faqat bitta ... nuqtaga ega bo'ladi. Bu shartlar ... to'g'ri chiziq uchun bajariladi, demak, ... to'g'ri chiziq berilgan ... urinma bo'ladi.

Javob: ... to'g'ri chiziq urinma bo'ladi.

380. Bir aylanaga o'tkazilgan AB va AC urinmalar orasidagi BAC burchak 60°, BAC siniq chiziqning uzunligi 22,5 dm. B va C urinish nuqtalari orasidagi masofani toping.

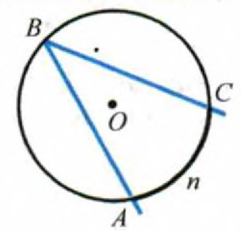
381. To'g'ri burchakli ACB ($\angle C = 90°$) uchburchakning katetlari $AC = 3$ sm va $BC = 4$ sm. Markazi C nuqtada bo'lgan radiusi 2,4 sm ga teng aylana o'tkazilgan. Bu aylana bilan AB to'g'ri chiziq o'zaro qanday holatda bo'ladi?

382. O markazli va radiusi 8 sm bo'lgan aylanaga A nuqtadan urinma o'tkazilgan. A va O nuqtalar orasidagi masofa 16 sm ga teng. AOB burchakni toping.

36- mavzu. AYLANAGA ICHKI CHIZILGAN BURCHAK

Ta'rif. *Uchi aylanada yotuvchi, tomonlari esa shu aylanani kesib o'tuvchi burchak* ***aylanaga ichki chizilgan burchak*** *deyiladi.*

143- rasmda ABC burchak aylanaga ichki chizilgan, AnC yoy shu burchakning ichiga joylashgan. Bunday holda, ichki chizilgan ABC burchak AnC yoyga tiralgan deb ham aytiladi.



143- rasm.

Teorema.

Aylanaga ichki chizilgan burchak o'zi tiralgan yoyning yarmi bilan o'lchanadi:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

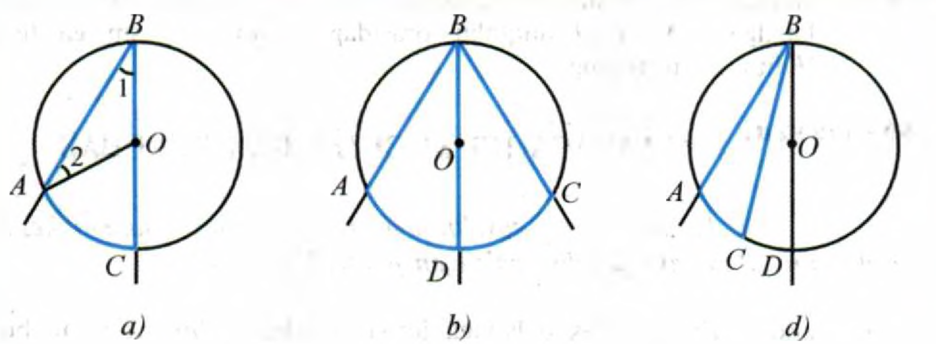
I s b o t. $\angle ABC$ – O markazli aylananing AC yoyiga tiralgan ichki chizilgan burchak bo'lsin (144- rasm). Aylana markazining shu ichki chizilgan burchakka nisbatan joylashishining uch holini ko'rib chiqamiz.

1- h o l. *Aylana markazi ichki chizilgan burchakning tomonlaridan biri, masalan, BC tomonda yotadi* (144- *a* rasm). OA radiusni o'tkazamiz va AOC markaziy burchakni qaraymiz. U BOA uchburchakning tashqi burchagidir. Uchburchak tashqi burchagining xossasiga ko'ra: $\angle AOC = \angle OBA + \angle OAB$. Ammo $\angle OBA = \angle OAB$, chunki AOB uchburchak teng yonli ($OA = OB = R$). OBA va OAB burchaklar esa teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklardir. Demak, $\angle AOC = 2\angle ABC$ (1). Markaziy burchakning kattaligi shu burchakka mos yoyning burchak kattaligiga teng bo'lishini bilasiz (32- mavzu). Bu holda AC yoy yarim aylanadan kichik, shuning uchun markaziy burchak xossasiga ko'ra: $\angle AOC = \smile AC$ (2).

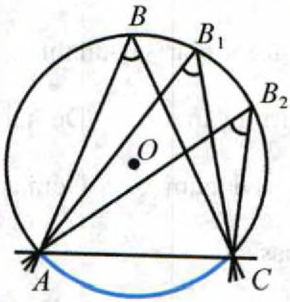
(1) va (2) tengliklardan: $2\angle ABC = \smile AC$, ya'ni $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.

Teorema 1- hol uchun isbotlandi.

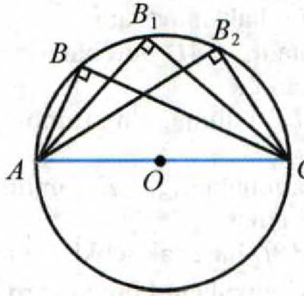
2- h o l. *Aylananing markazi O ichki chizilgan burchak tomonlari orasida yotadi. BO* nurni o'tkazamiz, u AC yoyni biror D nuqtada kesadi (144-*b* rasm). D nuqta AC yoyni ikkita $\smile AD$ va $\smile DC$ yoyga bo'ladi. Demak, isbot qilin-



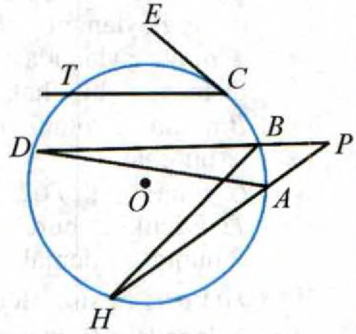
144- rasm.



145- rasm.



146- rasm.



147- rasm.

ganga ko‘ra (1- hol): $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ va $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile DC$. Bu tengliklarni hadma-had qo‘shib, hosil qilamiz:

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile DC = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile DC) = \frac{1}{2} \smile AC.$$

3- hol. *Aylananing markazi O ichki chizilgan burchakdan tashqarida yotadi.* Bu holning isbotini 144- *d* rasmdan foydalanib, o‘zingiz mustaqil bajaring.

1- natija. *Bir yoyga tiralgan hamma ichki chizilgan burchaklar o‘zaro tengdir* (145- rasm):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = ... = \frac{1}{2} \smile AC.$$

2- natija. *Diametrga (yarim aylanaga) tiralgan hamma ichki chizilgan burchaklar to‘g‘ri burchakdir* (146- rasm):

$$\angle B = \angle B_1 = \angle B_2 = ... = 90°.$$

Savol, masala va topshiriqlar

383. 1) Qanday burchak aylanaga ichki chizilgan burchak deyiladi?
2) Ichki chizilgan burchak qanday o‘lchanadi?
3) Yarim aylanaga tiralgan ichki chizilgan burchak nimaga teng?

384. AB va AC — aylana vatarlari, $\angle BAC = 70°$, $\smile AB = 120°$. AC yoyning gradus muqdorini toping.

385. HAD, HBD, TCE va HPD burchaklardan qaysi biri ichki chizilgan burchak bo‘ladi (147- rasm)? Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

Yechish. Ichki chizilgan burchak deb, uchi ... yotadigan, tomonlari esa aylanani ... burchakka aytiladi.

A nuqta aylanada yotadi, HAD burchakning tomonlari aylanani ... . Demak, ... burchak ichki ... .

B nuqta ... yotadi, HBD burchakning tomonlari aylanani ... . Demak, ... burchak ... .

C nuqta ..., TCE burchakning CE tomoni aylanani ... . Demak, TCE ichki ... burchak emas.

P nuqta ..., demak, HPD burchak ichki ... emas.

Javob: ... va ... ichki chizilgan burchaklardir.

386. Aylanada AB diametr va AC vatar o'tkazilgan. Agar AC va CB yoylarning gradus o'lchovi 7 : 2 nisbatda bo'lsa, BAC burchakni toping.

387. 148- rasmda O nuqta – aylana markazi, $\angle AOB = 88°$. $\angle ACB$ ni toping.

Yechish. AOB burchak berilgan aylananing ... burchagi bo'ladi va ...° ga teng. Demak, $\smile ADB = ...°$. ACB burchak ... chizilgan burchak bo'ladi va ... yoyga tiraladi, shuning uchun $\angle ACB = \frac{1}{2}\smile ... = ...°$.

Javob: $\angle ACB = ...°$.

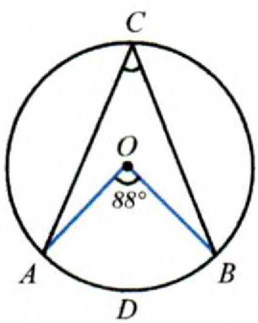
388. AB va BC – markazi O nuqtada bo'lgan aylananing vatarlari, $\angle ABC = 30°$. Agar aylana radiusi 10 sm ga teng bo'lsa, AC vatarning uzunligini toping.

389. 149- rasmda $\smile CAB = 130°$. $\angle CAB$ ni toping.

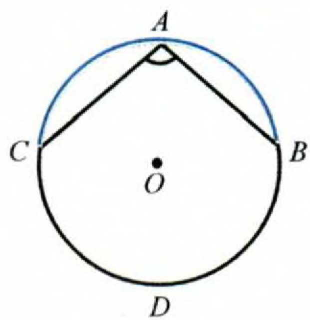
Yechish. CAB burchak aylanaga **ichki** chizilgan burchak bo'ladi va $\smile$**CDB** yoyga tiralgan. $\smile CDB = 360° - \smile \mathbf{CAB} = 360° - \mathbf{130°} = \mathbf{230°}$,

$\angle CAB = \frac{1}{2}\smile \mathbf{CDB} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{230°} = \mathbf{115°}$.

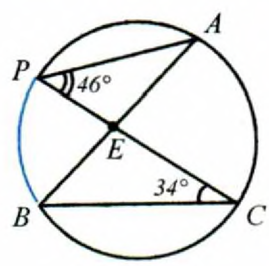
Javob: $\angle CAB = \mathbf{115°}$.



148- rasm.



149- rasm.



150- rasm.

390. A, B va C nuqtalar markazi O nuqtada bo'lgan aylanada yotadi. Agar: 1) $\angle ABC = 70°$; 2) $\angle ABC = 180°$; 3) $\angle ABC = 210°$ bo'lsa, aylananing markazi AC kesmada yotadimi?

391. Vatar aylanani ikki yoyga bo'ladi. Agar bu yoylar burchak kattaliklarining nisbati: 1) $5:4$; 2) $7:3$ kabi bo'lsa, vatar aylana nuqtasidan qanday burchak ostida ko'rinadi?

392. 150- rasmda $\angle APE = 46°$, $\angle BCE = 34°$. $\angle AEP$ ni toping.

Yechish. PAB va BCP ichki chizilgan burchaklar bitta BP ..., demak, $\angle PAB = \angle ... = ...$. AEP uchburchakdan ega bo'lamiz:

$\angle AEP = 180° - (\angle ... + \angle ...) = 180° - (... + ...) = ...$.

Javob: $\angle AEP = ...$.

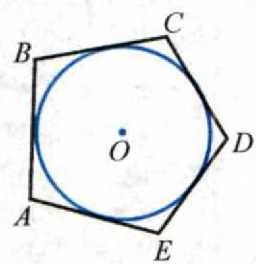
393. Aylana beshta teng yoyga bo'lingan: $\smile AB = \smile BC = \smile CD = \smile DE = \smile EA$. Shu aylanaga ichki chizilgan BAC, BAD, BAE, CAE va DAE burchaklarning kattaliklarini toping.

394. Aylanani $3:5$ nisbatda bo'luvchi vatarning biror uchidan o'tkazilgan diametr bilan tashkil etgan burchakni toping.

37- mavzu. ICHKI CHIZILGAN AYLANA

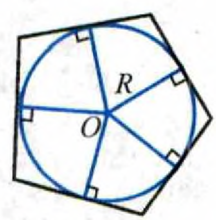
1. Aylanaga tashqi chizilgan ko'pburchaklar.

Ta'rif. *Agar ko'pburchakning hamma tomonlari aylanaga urinsa, ko'pburchak* ***aylanaga tashqi chizilgan*** *deyiladi, aylana esa shu ko'pburchakka* ***ichki chizilgan aylana*** *deyiladi* (151- rasm).



151- rasm.

Ko'pburchakka ichki chizilgan aylana markazidan uning tomonlarigacha bo'lgan masofa aylana radiusiga teng. Demak, uning markazi ko'pburchakning hamma tomonlaridan teng masofada joylashgan, shuning uchun u ko'pburchak barcha burchaklarining bissektrisalari kesishish nuqtasida bo'ladi (152- rasm).

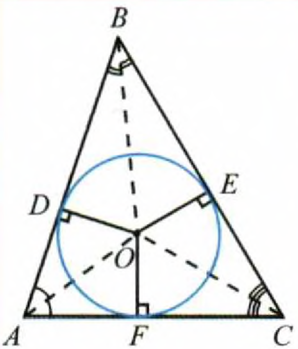


152- rasm.

2. Uchburchakka ichki chizilgan aylana.

Teorema.

Har qanday uchburchakka ichki aylana chizish mumkin va faqat bitta.



153- rasm.

I s b o t. ΔABC berilgan bo'lsin (153- rasm). Bu uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazi AB, AC va BC tomonlardan teng uzoqlikdagi nuqta bo'lishi ravshan. Burchak bissektrisasining har bir nuqtasi, uning tomonlaridan teng uzoqlikda yotishini bilasiz. Shuning uchun ichki chizilgan aylananing markazi uchburchak bissektrisalarining kesishish nuqtasida bo'ladi; markazdan tomonlarning bittasiga tushirilgan perpendikular, masalan, OD aylananing radiusi bo'ladi ($OD = r$). Bissektrisalar yolg'iz bitta nuqtada kesishishgani uchun, bundan boshqa ichki chizilgan aylana bo'lishi mumkin emas. Teorema isbot qilindi.

Har qanday uchburchakka faqat bitta ichki aylana chizish mumkin. Bu aylananing markazi uchburchak bissektrisalari kesishgan nuqtadir.

Savol, masala va topshiriqlar

395. 1) Qanday aylana ko'pburchakka ichki chizilgan deyiladi?
2) Ichki chizilgan aylananing markazi qayerda bo'ladi?

396. Biror uchburchak yasang va unga ichki aylana chizing.

397. Teng tomonli uchburchakning balandligi h ga teng. Unga ichki chizilgan aylananing radiusi $r = \frac{h}{3}$ ga teng ekanini isbotlang.

398. Agar teng tomonli uchburchakning:
a) balandligi: 1) 30 sm; 2) 4,2 m; 3) 5 sm; 4) 3,6 sm; 5) 11,1 sm;
b) medianasi: 1) 21 sm; 2) 0,9 m; 3) 7 dm; 4) 5,4 sm; 5) 37,2 sm;
d) bissektrisasi: 1) 54 mm; 2) 8 m; 3) 72 sm; 4) 9,6 sm bo'lsa,
unga ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

399. Katetlari a va b, gipotenuzasi c ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusi $r = \frac{a+b-c}{2}$, shu uchburchakning perimetri esa $P = 2(c + r)$ formula bilan hisoblanadi. Shuni isbotlang.

400. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 40 sm va 30 sm; 2) 9 dm va 40 dm; 3) 0,5 m va 1,2 m; 4) 0,7 dm va 24 sm; 5) 0,9 sm va 1,2 sm; 6) 12 sm va 16 sm ga teng. Shu uchburchakning perimetri va unga ichki chizilgan aylana radiusini toping.

401. Teng yonli uchburchakning asosi a ga va yon tomoni b ga teng. Shu uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusi $r = \frac{1}{6}\sqrt{4b^2 - a^2}$ formula bilan hisoblanadi. Shuni isbotlang.

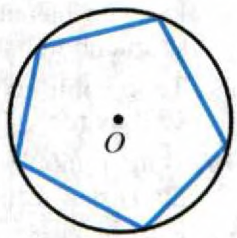
402. Teng yonli uchburchakning asosi va yon tomoni mos ravishda: 1) 24 sm, 13 sm; 2) 40 dm, 25 dm; 3) 16 sm, 17 sm; 4) 48 dm, 41 dm ga teng. Shu uchburchakka ichki chizilgan aylana radiusini toping.

403. Teng yonli uchburchakka ichki chizilgan aylana yon tomonlaridan birini urinish nuqtasida uchidan boshlab hisoblaganda: 1) 8 sm va 5 sm li; 2) 14 sm va 11 sm li kesmalarga ajratadi. Shu uchburchakning perimetri va ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

404. To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari: 1) 5 sm va 12 sm; 2) 1,5 dm va 20 sm; 3) 14 sm va 48 sm ga teng. Shu uchburchakning perimetri va ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

38- mavzu. TASHQI CHIZILGAN AYLANA

Ta’rif. *Agar ko‘pburchakning hamma uchlari aylanada yotsa, bunday ko‘pburchak* ***aylanaga ichki chizilgan*** *deyiladi, aylana esa shu ko‘pburchakka* ***tashqi chizilgan aylana*** *deyiladi* (154- rasm).



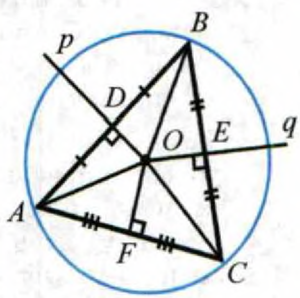
154- rasm.

Uchburchakka tashqi chizilgan aylana.

Teorema.

Har qanday uchburchakka tashqi aylana chizish mumkin va faqat bitta.

Isbot. $\triangle ABC$ berilgan bo‘lsin (155- rasm). Uning AB va BC tomonlariga p va q o‘rta perpendikularlar o‘tkazamiz. Ular biror O nuqtada kesishadi (kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular to‘g‘ri chiziqlar kesishadi). $O \in p$ bo‘lgani uchun, $OA = OB$ bo‘ladi, shuningdek, $O \in q$ bo‘lgani uchun, $OB = OC$ bo‘ladi. Shuning uchun $OA = OC$, ya’ni AC tomonning o‘rta perpendikulari ham O nuqtadan o‘tadi. Shunday qilib, O nuqta ABC uchburchakning uchala uchidan teng uzoqlashgan bo‘ladi:



155- rasm.

$OA = OB = OC$. Demak, ABC uchburchakka markazi O nuqtada va $R = OA$ bo‘lgan tashqi aylana chizish mumkin. O‘rta perpendikularlar yolg‘iz bitta nuqtada kesishgani uchun, bundan boshqa tashqi chizilgan aylana bo‘lishi mumkin emas.

Har qanday uchburchakka faqat bitta tashqi aylana chizish mumkin. Bu aylananing markazi — uchburchak tomonlarining o‘rta perpendikularlarining kesishgan nuqtasidir.

Savol, masala va topshiriqlar

405. 1) Qanday ko‘pburchakni aylanaga ichki chizilgan deyiladi?
2) Tashqi chizilgan aylananing markazi qayerda bo‘ladi?

406. Berilgan uchburchakka tashqi aylana chizing.

407. a) O markazli aylana to‘g‘ri burchakli uchburchakka tashqi chizilgan. O nuqta gipotenuzaning o‘rtasi ekanini isbotlang.
b) Gipotenuzasi: 1) 25 sm; 2) 41 dm; 3) 130 mm; 4) 61 sm ga teng bo‘lgan uchburchakka tashqi chizilgan aylana radiusini toping.

408. Agar teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasiga o‘tkazilgan balandlik: 1) 12 sm; 2) 1,5 dm; 3) 32 mm ga teng bo‘lsa, shu uchburchakka tashqi chizilgan aylananing radiusini toping.

409. Teng yonli uchburchakning yon tomoni 2 sm, uchidagi burchagi esa 120° ga teng. Tashqi chizilgan aylananing diametrini toping.

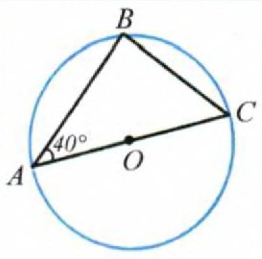
410. Teng tomonli uchburchakka tashqi va ichki chizilgan aylanalarning markazlari ustma-ust tushadi. Bunda tashqi chizilgan aylananing radiusi ichki chizilgan aylana radiusidan ikki marta katta bo‘lishini isbotlang.

411. Tashqi chizilgan aylananing markazi uchburchakning tomonida yotsa, u qanday uchburchak bo‘ladi?

412. ABC uchburchakda $\angle A = 40°$. Agar unga tashqi chizilgan aylananing markazi AC tomonda yotsa, uchburchakning qolgan burchaklarini toping (156- rasm). Bo‘sh joylarga mos javoblarni yozing.

Yechish. A, B va ... nuqtalar berilgan ... yotadi, uning markazi esa O nuqta ... kesmada yotadi, u holda AC — berilgan aylananing ..., B burchak esa bu aylanaga ... va u ... tiralgan. Shuning uchun $\angle B = ...$, $\angle C = 180° - (40° + ...) = ... - ... = ...$.

Javob: $\angle B = ...$, $\angle C = ...$.



156- rasm.

413. a) Aylananing radiusi R ga teng. Shu aylanaga ichki chizilgan teng tomonli uchburchak medianasining uzunligini toping.

b) Aylananing radiusi: 1) 10 sm; 2) 2,4 sm. Shu aylanaga ichki chizilgan teng tomonli uchburchak medianasining uzunligini toping.

414. To'g'ri burchakli ABC ($\angle B = 90°$) uchburchakka tashqi aylana chizilgan. Agar: 1) $AB = 12$ sm, $BC = 16$ sm; 2) $AB = 20$ sm, $\angle C = 30°$; 3) $BC = 8$ sm, $\angle C = 60°$ bo'lsa, shu aylananing radiusini toping.

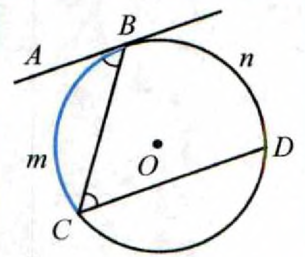
39- mavzu. AYLANANI KESUVCHI TO'G'RI CHIZIQLARDAN HOSIL BO'LGAN BURCHAKLARNI O'LCHASH

1. Urinma bilan vatardan tuzilgan burchak.

1- teorema.

Urinma bilan vatardan tuzilgan burchak o'z ichiga olgan yoyning yarmi bilan o'lchanadi.

I s b o t. AB urinma va BC vatar bo'lsin. $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile BmC$ ekanini isbot qilamiz (157- rasm). Buning uchun C uchidan $CD \parallel AB$ ni o'tkazsak, $\angle ABC = \angle BCD$, chunki ular ichki almashinuvchi burchaklar. Ammo $\angle C = \frac{1}{2} \smile BnD$ va $CD \parallel AB$ bo'lgani uchun $\smile BnD = \smile BmC$ va $\angle B = \angle C = \frac{1}{2} \smile BnD = \frac{1}{2} \smile BmC$.



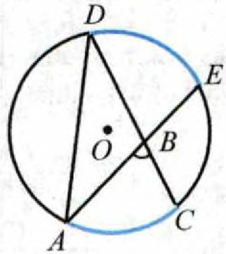
157- rasm.

2. Ikkita vatarning kesishishidan hosil bo'lgan burchaklar.

2- teorema.

Ixtiyoriy ikkita vatarning kesishishidan hosil bo'lgan har qaysi vertikal burchak, ularning tomonlari tiralgan yoylar yig'indisining yarmiga teng.

I s b o t. $\angle ABC$ – CD va AE vatarlarning kesishishidan hosil bo'lgan burchaklardan bittasi bo'lsin (158- rasm). $\angle ABC = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile DE)$ ekanini isbotlaymiz. Buning uchun A va D nuqtalarni birlashtiramiz, u holda $\angle ABC$ – $\triangle ABD$ ga nisbatan tashqi burchak bo'ladi. Demak,



158- rasm.

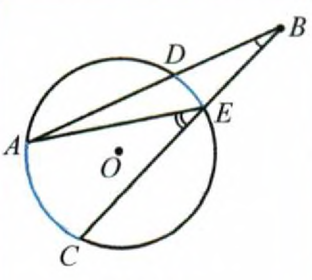
$\angle ABC = \angle ADC + \angle DAE$. Ammo $\angle ADC = \frac{1}{2}\smile AC$ va $\angle DAE = \frac{1}{2}\smile DE$. Shuning uchun $\angle ABC = \frac{1}{2}\smile AC + \frac{1}{2}\smile DE = \frac{1}{2}(\smile AC + \smile DE)$.

$\angle ABD = \angle CBE = \frac{1}{2}(\smile AD + \smile CE)$ ekani xuddi yuqoridagidek isbotlanadi. Buni o'zingizga havola qilinadi.

3. Aylananing tashqarisidagi bir nuqtadan unga o'tkazilgan ikki kesuvchi orasidagi burchak.

3-teorema.

Aylananing tashqarisidagi bir nuqtadan unga o'tkazilgan ikki kesuvchi orasidagi burchak (*ABC*) kesuvchilar orasidagi yoylar (*AC* va *DE*) ayirmasining yarmiga teng.



159- rasm.

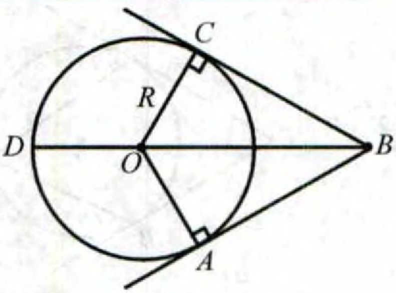
I s b o t. B — aylana tashqarisidagi nuqta, BA va BC kesuvchilar bo'lsin. $\angle B = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$ bo'lishini isbotlaymiz. Buning uchun A va E nuqtani birlashtiramiz (159- rasm). $\angle AEC - \Delta AEB$ ga tashqi burchak bo'ladi. Demak, $\angle AEC = \angle B + \angle DAE$, bundan $\angle B = \angle AEC - \angle DAE$. Ammo $\angle AEC = \frac{1}{2}\smile AC$ va $\angle DAE = \frac{1}{2}\smile DE$. Bularni o'rniga qo'ysak: $\angle B = \frac{1}{2}\smile AC - \smile DE = \frac{1}{2}(\smile AC - \smile DE)$.

4. Aylana tashqarisidagi bir nuqtadan unga o'tkazilgan ikki urinmaning xossasi.

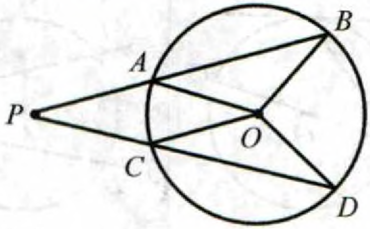
4-teorema.

Aylana tashqarisidagi bir nuqtadan unga ikkita urinma o'tkazilsa, ularning o'sha nuqtadan urinish nuqtalarigacha bo'lgan kesmalar teng va aylananing markazi ular orasidagi burchak bissektrisasida yotadi, bu burchak 180° bilan urinmalar tiralgan yoy ayirmasiga teng.

I s b o t. BC va BA aylanaga C va A nuqtalardagi urinmalar va BD bissektrisasi bo'lsin. $AB = CB$ va O markazning BD da yotishini hamda $\angle B = 180° - \smile AC$ ekanini ko'rsatamiz (160- rasm). OA va OC radiuslar o'tkazilsa, $OA \perp BA$ va $OC \perp BC$ bo'lgani uchun: ΔAOB va ΔCOB lar to'g'ri burchakli uchburchaklardir. $\Delta AOB = \Delta COB$, chunki BO gipotenuza umumiy, $OA = OC = R$. Uchburchaklarning tengligidan: $AB = BC$. Endi $OC = OA = R$



160- rasm.



161- rasm.

va $OA \perp BA$, $AB = BC$ va $OC \perp BC$ bo'lgani uchun O markaz doimo BD bissektrisada yotadi. Aylana tashqarisidagi bir nuqtadan o'tkazilgan ikki kesuvchi orasidagi burchakni o'lchash haqidagi teoremaga asosan: $\angle B = \frac{1}{2}(\smile ADC - \smile AC) = \frac{1}{2}(360° - \smile AC - \smile CA) = 180° - \smile AC$, demak, $\angle B = 180° - \smile AC$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

Savol, masala va topshiriqlar

415. 1) Urinma bilan vatardan tuzilgan burchak qanday o'lchanadi? Ikki vatarning kesishishidan hosil bo'lgan burchaklar-chi?
2) Ikki kesishuvchi vatar orasidagi burchak nimaga teng?
3) Bir nuqtadan o'tkazilgan ikki urinma qanday xossaga ega?

416. Aylana radiusiga teng AB vatar A nuqtada o'tkazilgan urinma bilan qanday burchaklar hosil qiladi?

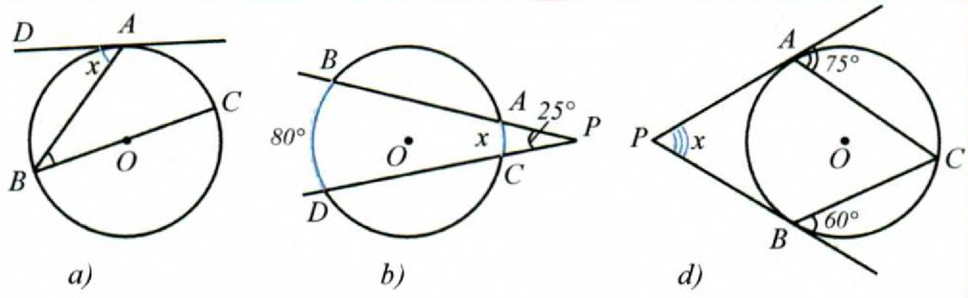
417. AB vatar 56° li yoyni tortib turadi. Shu vatarning uchlaridan aylanaga o'tkazilgan urinmalar bilan vatardan hosil bo'lgan burchaklarni toping.

418. AB kesma aylananing diametri, BC va AD vatarlar esa parallel. CD vatar diametr bo'lishini isbotlang.

419. Aylanadan tashqaridagi nuqtadan o'tkazilgan ikki urinmaning urinish nuqtalari aylanani: 1) $1:9$; 2) $4:15$; 3) $7:11$; 4) $3:7$ nisbatdagi ikkita yoyga ajratadi. Urinmalar orasidagi burchakni toping.

420. Aylanani kesuvchi ikki vatari orasidagi burchaklardan biri 70° ga teng. Shu burchakka qo'shni bo'lgan burchaklarning yig'indisini toping.

421. O markazli aylananing AB va CD vatarlarining davomi P nuqtada kesishadi (161- rasm). $\angle P = \frac{1}{2}(\angle BOD - \angle AOC)$ ekanini isbotlang.



162- rasm.

422. 162- rasmlarda tasvirlangan x noma'lum burchakni toping.

423. AB va CD — bir aylananing vatarlari, P — ularning kesishish nuqtasi. Agar BPD burchak BPC burchakdan 4 marta katta, CDA burchak esa BPC dan 26° ga katta bo'lsa, CBP burchakni toping.

424. Aylananing A, B va C nuqtalari uni: 1) 11 : 3 : 4; 2) 14 : 6 : 4; 3) 13 : 12 : 5; 4) 17 : 10 : 9 nisbatda yoylarga bo'ladi. A, B va C nuqtalardan urinmalar o'tkazilib, bir-biri bilan kesishguncha davom ettirilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning burchaklarini toping.

425. 1) 52°; 2) 74°; 3) 104° li markaziy burchak tashkil etgan ikki radiusning uchlariga o'tkazilgan urinmalar orasidagi burchakni toping.

426. Aylanani: 1) 2 : 7; 2) 4 : 5 nisbatda bo'luvchi vatarning uchlaridan ikkita urinma o'tkazilgan. Hosil bo'lgan uchburchakning burchaklarini toping.

427. B nuqtadan aylanaga o'tkazilgan BA va BC urinmalar aylanani urinish nuqtalarida: 1) 5 : 4; 2) 12 : 6; 3) 9 : 6; 4) 13 : 7; 5) 2 : 3 nisbatda ikki yoyga bo'ladi. ABC burchakning miqdorini toping.

6- § ga doir qo'shimcha mashqlar

428. M, N, P nuqtalar markazi O nuqtada bo'lgan aylanada yotadi. Agar $\smile MNP = 96°$ bo'lsa, MNP burchakni toping.

429. O markazli aylananing radiusi 20 ga teng. Agar: 1) $\angle AOB = 60°$; 2) $\angle AOB = 90°$; 3) $\angle AOB = 180°$ bo'lsa, AB vatarni toping.

430. O markazli aylananing AB va CD vatarlari teng. 1) Oxirlari A va B da bo'lgan ikkita yoy mos ravishda oxirlari C va D da bo'lgan ikkita yoyga teng ekanini isbotlang. 2) Agar $\angle AOB = 130°$ bo'lsa, oxirlari C va D da bo'lgan yoyni toping.

431. AB yarim aylanada C va D nuqtalar shunday olinganki, unda $\smile AC = 35°$, $\smile BD = 25°$. Agar aylana radiusi 12 sm ga teng bo'lsa, CD vatarni toping.

432. Aylananing AB va CD vatarlari P nuqtada kesishadi. Agar $\smile AD = 56°$ va $\smile BC = 70°$ bo'lsa, BPC burchakni toping.

433. AB — O markazli aylananing vatari, BC — unga urinma. $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOB$ yoki $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOB$ ekanini isbotlang.

6- TEST

1. Teng tomonli uchburchakning balandligi 9 sm. Shu uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

A) 3; B) 4,5; C) 6; D) 2,5.

2. Uchburchak uchlaridan unga ichki chizilgan aylananing urinish nuqtalarigacha bo'lgan masofalar mos ravishda 2; 3 va 5 ga teng. Shu uchburchakning perimetrini toping.

A) 19; B) 18; C) 24; D) 20.

3. Katetlari 40 va 30 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

A) 10; B) 7; C) 6,5; D) 8.

4. Radiusi R ga teng bo'lgan aylanadagi nuqtadan uzunliklari R ga teng bo'lgan ikkita vatar o'tkazildi. Vatarlar orasidagi burchakni toping.

A) 120°; B) 110°; C) 135°; D) 40°.

5. Aylana tashqarisidagi nuqtadan aylanaga ikkita urinma o'tkazilgan. Agar urinmalar orasidagi burchak 72° bo'lsa, aylananing urinish nuqtalari orasidagi katta yoyini toping.

A) 248°; B) 240°; C) 252°; D) 236°.

6. Aylanani kesuvchi ikki vatari orasidagi burchaklardan biri 80° ga teng. Shu burchakka qo'shni bo'lgan burchaklarning yig'indisini toping.

A) 200°; B) 90°; C) 100°; D) 160°.

Tarixiy ma'lumotlar

Abul Vafo Buzjoniy 940- yili Xuroson viloyatining Hirot va Nishopur shaharlari orasidagi Buzjon shahrida (hozirgi Turkmanistonning Kushka shahri atrofida) tug'ilgan. U Bog'dodda o'qigan va ijod qilgan.

Abul Vafo Buzjoniyning «Hunardmandlar geometrik yasashlardan nimalarni bilishlari zarur» degan kitobining birinchi va ikkinchi boblari chizg'ich va sirkul yordamida yasashlarga bag'ishlangan. Biz sizga Abul Vafoning aylananing markazini topish masalasini keltiramiz.

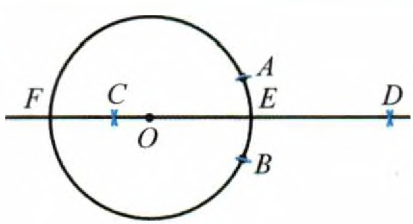
«Agar «Aylananing markazi qanday topiladi?» deb so'ralsa, uning aylanasida A va B nuqtalarni belgilab va AB masofa bilan A va B nuqtalarni markaz qilib ikkita teng aylana yasaymiz, ular C va D nuqtalarda kesishadi (163- rasm). CD chiziqni o'tkazamiz va uni aylana bilan E va F nuqtalarda kesishguncha davom ettiramiz, so'ngra EF chiziqni O nuqtada teng ikkiga bo'lamiz. U holda O nuqta aylananing markazi bo'ladi».

Abul Vafoning bu usuli A va B nuqtalarni markaz qilib yoy chizilganda ularning kesishgan nuqtalarini tutashtiruvchi CD to'g'ri chiziq berilgan aylananing markazidan o'tib, uning AB vatariga perpendikular bo'lishiga asoslangan.

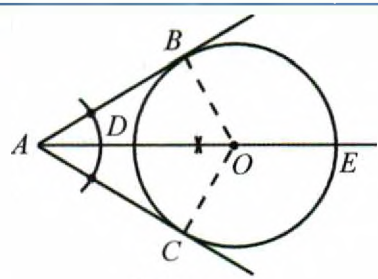
Hozir bu masala quyidagicha yechiladi: faraz qilaylik, bizga markazi belgilanmagan aylana berilgan va uning markazini aniqlash talab qilingan (164- rasm).

A nuqtadan bu aylanaga AB va AC urinmalarni o'tkazamiz hamda BAC burchakning bissektrisasini yasaymiz. Bissektrisa aylanani D va E nuqtalarda kesadi. DE ni teng ikkiga bo'lsak, bo'linish nuqtasi O aylananing markazi bo'ladi. Nega? Yoki B nuqtada AB urinmaga perpendikular o'tkazsak, u bissektrisani O nuqtada kesadi. O nuqta aylana markazi bo'ladi. Nega?

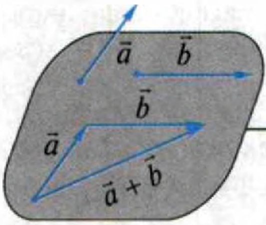
Shu bilan bir qatorda Abul Vafo ushbu asarida yana yoyiq yoyni to'liq aylanaga to'ldirish, aylanaga uning tashqarisidagi nuqtadan urinma o'tkazish, aylanaga uning aylanasida yotgan nuqtadan urinma o'tkazish kabi yasash usullarini bergan.



163- rasm.



164- rasm.



7- §. VEKTORLAR

40- mavzu. VEKTOR TUSHUNCHASI

1. Vektor kattaliklar. Vektor.

Sizga ma'lum bo'lgan kattaliklar ikki ko'rinishda bo'lishi mumkin. Shunday kattaliklar borki, ular o'zlarining son qiymatlari bilan (berilgan o'lchov birligida) to'la aniqlanadi. Masalan, uzunlik, yuza, og'irlik shular jumlasidandir.

1- ta'rif. *Faqat son qiymati bilan aniqlanadigan kattaliklar* ***skalar kattaliklar*** *deyiladi.*

Yana shunday kattaliklar borki, ularni to'la bilish uchun bu kattaliklarni ifodalovchi son qiymatlardan tashqari ularning yo'nalishlarini ham bilish zarur bo'ladi. Masalan, tezlik, kuch va bosim shular jumlasidandir.

Vektor – geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u son (uzunlik) va yo'nalishi bilan to'la aniqlanadi. Ko'rgazmali bo'lishi uchun uni yo'naltirilgan kesma ko'rinishida tasavvur qilish mumkin. Aslida vektorlar haqida gapirilganda, hammasi o'zaro parallel bir xil uzunlik va bir xil yo'nalishga ega bo'lgan yo'naltirilgan kesmalarning butun bir sinfini nazarda tutish to'g'riroq bo'ladi.

2- ta'rif. *Son qiymati va yo'nalishi bilan aniqlanadigan (tavsiflanadigan) kattaliklar* ***vektor kattaliklar*** *yoki* ***vektorlar*** *deb ataladi.*

Fizika, mexanika va matematikaning son bilangina emas, balki yo'nalishi bilan xarakterlanadigan miqdorlarni tekshiruvchi turli masalalari vektor tushunchasiga olib keladi. Masalan, kuch, tezlik – bular vektorlardir.

Vektor kattaliklarni biz juda ko'p hollarda uchratamiz. Masalan: transportda ketayotganingizda harakat tezligi, burilish yoki to'xtash bilan bog'liq vektor kattaliklarni ko'rishingiz mumkin. Tabiatni o'rganuvchi fanlarda bu – tezlanish, inersiya kuchi, markazdan qochma kuch va shunga o'xshash nomlar bilan ataladi.

Biz vektor kattaliklarni tabiiy ma'nosini hisobga olmagan holda uning matematik tabiatini o'rganamiz. Albatta, vektor kattalikning matematik xossalari o'zining tabiiy ma'nosiga ega bo'ladi.

Vektor kattalikning son miqdorini kesma orqali ifodalaymiz. Ma'lumki, har qanday kesmaning ikki uchi bor. Ulardan birini vektorning *boshi* deb, ikkinchi uchini vektor kattalik yo'nalishiga mos yo'naltiramiz va strelka bilan belgilaymiz. Buni vektorning *oxiri (uchi)* deymiz.

3- ta'rif. ***Vektor*** *(vektor kattalik) deb yo'nalishga ega bo'lgan kesmaga aytiladi.*

Vektor kattalikni yo'nalishi ko'rsatilgan kesma sifatida tasvirlanadi. Vektorni ifodalovchi kesma uchlari A va B nuqtada bo'lsa, A nuqtadan B nuqtaga yo'nalgan vektor $\overrightarrow{AB}$ kabi belgilanadi. Shuningdek, vektorlar $\vec{a}$, $\vec{b}$ (lotin alifbosining kichik harflari) shaklida ham belgilanishi mumkin (165- rasm).

O'qilishi: $\overrightarrow{AB}$ vektor yoki $\vec{a}$ vektor. Vektorning yo'nalishi uning boshi va oxirini ko'rsatish bilan aniqlanadi. Bunda vektor boshi birinchi o'ringa qo'yiladi (166- *a* rasm).

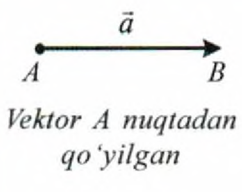
AB nurning aniqlab bergan yo'nalishini $\overrightarrow{AB}$ *vektorning yo'nalishi* deyiladi. Boshi va oxiri ustma-ust tushgan vektor ***nol vektor*** deb ataladi. $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ tenglik A va B nuqtalarning ustma-ust tushganini bildiradi (166- *b* rasm).

Vektorni ifodalovchi kesmaning uzunligi vektorning *moduli* yoki *absolut qiymati* deb ataladi.

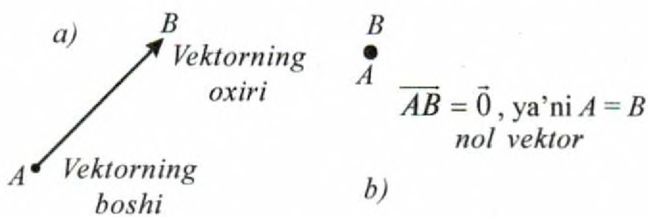
Vektorning moduli $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ kabi belgilanadi (167- rasm).

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ vektorning moduli AB kesmaning uzunligi hisoblanadi: $|\vec{a}|=|\overrightarrow{AB}|$. Shuning uchun geometriyada vektorning moduli yoki absolut qiymati uning *uzunligi* ham deb ataladi.

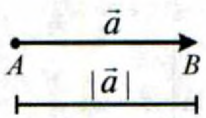
Nol vektorning moduli nolga teng: $|\vec{0}|=0$.



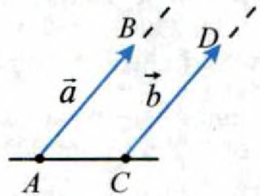
165- rasm.



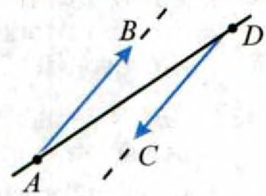
166- rasm.



167- rasm.



168- rasm.



169- rasm.

2. Vektorlarning tengligi.

Agar parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi ikkita vektor ularning boshi orqali o‘tgan: 1) to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda yotsa, ular *yo‘nalishdosh vektorlar* deyiladi (168- rasm); 2) to‘g‘ri chiziqqa nisbatan turli tomonda yotsa, ular *qarama-qarshi yo‘nalgan vektorlar* deyiladi (169- rasm).

$\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar: 1) *yo‘nalishdosh* bo‘lsa, ular $\overline{AB}\uparrow\uparrow\overline{CD}$ kabi; 2) *qarama-qarshi yo‘nalgan* bo‘lsa, $\overline{AB}\uparrow\downarrow\overline{CD}$ kabi belgilanadi.

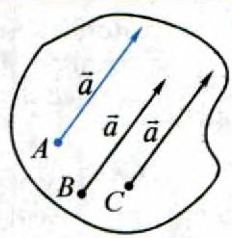
Nol bo‘lmagan $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlarning yo‘nalishlari bir xil yoki qarama-qarshi bo‘lsa, ular *kollinear vektorlar* deyiladi.

Nol vektor istalgan vektorga kollinear deb hisoblanadi.

4- ta'rif. *Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari teng va yo‘nalishlari bir xil bo‘lsa, bu vektorlar* ***teng vektorlar*** *deb ataladi.*

Vektorlarning tengligi $\vec{a}=\vec{b}$ shaklida yoziladi.

Vektorlarning tengligi uning boshi tekislikning ixtiyoriy nuqtasida bo‘la olishini ko‘rsatadi (170- rasm), ya’ni vektorning modulini o‘zgartirmay, yo‘nalishini saqlagan holda uning boshini tekislikning istalgan nuqtasiga ko‘chirish mumkin ekan. Buni *vektorni parallel ko‘chirish xossasi* deb ataymiz.



170- rasm.

Savol, masala va topshiriqlar

434. 1) Vektor nima? Vektorlar qanday belgilanadi?

2) Qanday vektorlar bir xil (qarama-qarshi) yo‘nalgan vektorlar deyiladi? Vektorning moduli nima?

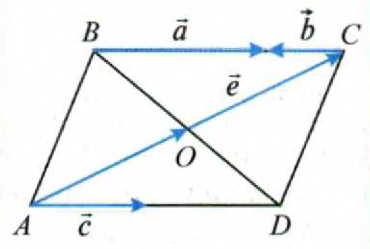
3) Qanday ikki vektor teng deyiladi?

435. *ABCD* to'g'ri to'rtburchak berilgan. Uning uchlari bilan berilgan barcha vektorlarni yozing. Ular ichidan qaysilari: 1) *AC* to'g'ri chiziqda yotadi? 2) *CD* to'g'ri chiziqqa parallel?

436. *ABCD* parallelogrammning diagonallari *O* nuqtada kesishadi. Uning uchlari va diagonallari kesishish nuqtasi bilan belgilangan vektorlarni yozing. Ular ichidan qaysilari: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{BO}$ vektorlarga kollinear?

437. *ABCD* parallelogrammda $\overrightarrow{AD}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning tengligini isbotlang.

438. *ABCD* – parallelogramm. 171- rasmda tasvirlangan vektorlar ichidan: 1) kollinear; 2) yo'nalishdosh; 3) qarama-qarshi yo'nalgan; 4) teng uzunliklarga ega bo'lgan vektorlar juftlarini ko'rsating.



171- rasm.

439. *ABCD* – to'g'ri to'rtburchak. Quyidagi yozuvlardan qaysi biri ma'noga ega:

1) $\overrightarrow{AD} < \overrightarrow{AC}$; 3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; 5) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

2) $|\overrightarrow{AD}| < |\overrightarrow{AC}|$; 4) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$; 6) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$?

440. Agar: 1) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ va $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DC}|$; 2) $\overrightarrow{AD} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{DC}$ vektorlar esa nokolleniar bo'lsa, *ABCD* to'rtburchakning turini aniqlang.

441. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ekanligi ma'lum. Ushbu tasdiqlar to'g'rimi:

1) $AB \parallel CD$; 2) $|AB| = |CD|$?

442. *ABCD* parallelogrammning diagonallari *O* nuqtada kesishadi. 1) $\overrightarrow{AB}$ vektor bilan yo'nalishdosh; 2) $\overrightarrow{AC}$ vektorga yo'nalishdosh; 3) $\overrightarrow{DO}$ vektor bilan qarama-qarshi yo'nalgan vektorlarni yozing.

443. *ABCD* to'g'ri to'rtburchakda $AB = 3$ sm, $BC = 4$ sm, E – AB tomonning o'rtasi. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning uzunliklarini toping.

444. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{BA}$ vektorlarning yo'nalishi haqida nima deyish mumkin?

41- mavzu. VEKTORLARNI QO‘SHISH VA AYIRISH

1. Vektorlarni qo‘shish. Bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar berilgan bo‘lsin (172- *a* rasm). Ixtiyoriy A nuqtani belgilaymiz va bu nuqtadan $\vec{a}$ vektorga teng $\overrightarrow{AB}$ vektorni qo‘yamiz. So‘ngra B nuqtadan $\vec{b}$ vektorga teng $\overrightarrow{BC}$ vektorni qo‘yamiz.

Endi $\vec{a}$ vektorning boshi A nuqtadan $\vec{b}$ vektor uchi C ga yo‘nalgan vektor o‘tkazamiz (172-*b* rasm). $\overrightarrow{AC}$ *vektor* $\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorlarning yig‘indisi* deyiladi. Vektorlarni qo‘shishning bu qoidasi *«ucburchak (uch nuqta) qoidasi»* deyiladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi $\vec{a} + \vec{b}$ kabi belgilanadi.

Uchburchak qoidasini quyidagicha ifodalasak ham bo‘ladi.

Agar A, B va C ixtiyoriy nuqtalar bo‘lsa, u holda

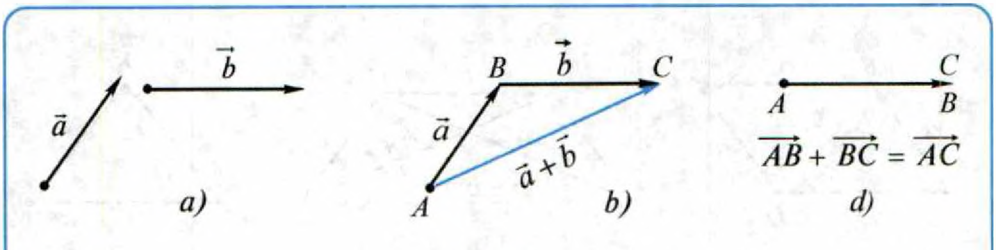
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

bo‘ladi.

Uchburchak qoidasi istalgan A, B va C nuqtalar uchun, shu bilan bir qatorda ulardan ikkitasi yoki uchtasi ustma-ust tushganda ham o‘rinli bo‘ladi (172- *d* rasm).

2. Vektorlarni qo‘shish qonunlari. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan tuzilgan $ABCD$ parallelogrammda yig‘indi vektor qo‘shiluvchi vektorlarning umumiy boshidan chiquvchi diagonalidan iborat. Odatda, vektorlarni bunday qo‘shish, vektorlarni qo‘shishning *«parallelogramm qoidasi (usuli)»* deyiladi (173- rasm).

Ma’lumki, parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari o‘zaro teng va parallel. Agar yo‘nalishlari bir xil bo‘lsa, parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng vektorlarni ifoda qiladi.



172- rasm.

Shunday qilib, $ABCD$ parallelogrammda AC diagonaldan iborat $\overrightarrow{AC}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indi vektori $\vec{a}+\vec{b}$ deb qabul qilamiz. Ko'rinib turibdiki, $\vec{a}+\vec{b}$ va $\vec{b}+\vec{a}$ vektorlar teng vektorlardir.

Demak, vektorlar yig'indisi ularni qanday tartibda ketma-ket joylashishiga bog'liq emas, ya'ni *istalgan* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorlar uchun*

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}.$$

Bu, vektorlarni qo'shishning *o'rin almashtirish qonunidir.*

Endi uchta $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektor yig'indisini ko'raylik (174- rasm).

Uch vektor ketma-ket joylashtirilganda, birinchi vektor boshidan uchinchi vektor uchiga yo'nalgan vektor ularning yig'indisi bo'ladi. Bunga vektorlarni ikkitadan qo'shish yo'li bilan ishonch hosil qilishingiz mumkin:

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD};$$

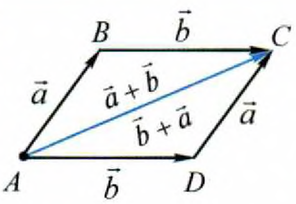
$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

Bunda, *istalgan* $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ *vektorlar uchun*

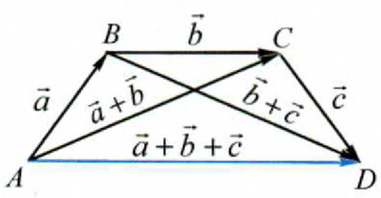
$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

tenglik o'rinli ekani kelib chiqadi. Bu vektorlarni qo'shishning *guruhlash qonuni (xossasi)dir.*

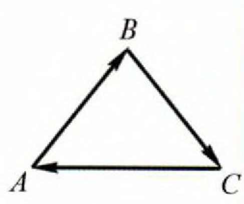
3. Vektorlarni ayirish. Vektorlarning har biri noldan farqli bo'lganda ularning yig'indisi nol vektor bo'lishi mumkin. Masalan, ABC uchburchakni qaraylik (175- rasm). Bunda $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CA}$ vektorlar yig'indisi nol vektor bo'ladi, ya'ni: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, chunki birinchi vektorning boshi bilan



173- rasm.



174- rasm.

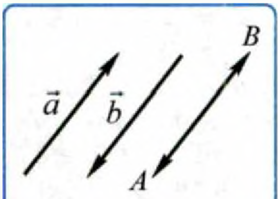


175- rasm.

uchinchi vektorning uchi ustma-ust tushdi. Demak, yig'indi vektor nol vektor — nuqta bo'ldi.

1-ta'rif. *Ikki vektorning yig'indisi nol vektor bo'lsa, ular* ***qarama-qarshi vektorlar*** *deb ataladi.*

Demak, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$ bo'lsa, $\vec{b}$ vektorni $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor deyiladi va $\vec{b} = -\vec{a}$ kabi yoziladi (176- rasm).



176- rasm.

Bunda $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar parallel bo'lib, turli tomonga yo'nalgan bo'ladi.

Bizga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ berilgan bo'lsin (177-*a* rasm). $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi bo'lgan $(-\vec{b})$ vektorning yig'indisini ko'raylik.

Vektorlarni ayirish xuddi sonlarni ayirish kabi qo'shishga teskari amaldir.

2-ta'rif. *$\vec{a}$* ***va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi*** *deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, uning $\vec{b}$ vektor bilan yig'indisi $\vec{a}$ vektorni beradi: $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$.*

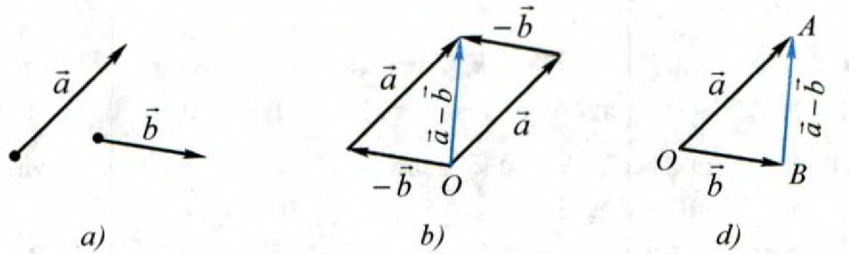
$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi (u $\vec{a} - \vec{b}$ kabi belgilanadi) $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektorga teng (177- *b* rasm).

Istalgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun

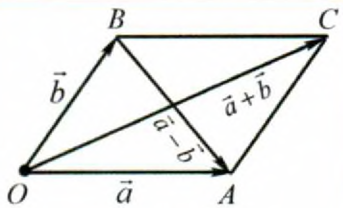
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

tenglik o'rinli.

Haqiqatan ham, $(\vec{a} + (-\vec{b})) + \vec{b} = \vec{a} + ((-\vec{b}) + \vec{b}) = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.



177- rasm.



178- rasm.

Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bitta O nuqtadan qo'yilgan bo'lsa, u holda $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani topish uchun

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$$

qoidadan foydalanish qulay (177- *d* rasm). Yuqoridan ko'rinadiki, *ayriluvchi* vektorning *oxiri ayirma* vektorning *boshi*, *kamayuvchi* vektorning *oxiri* esa *ayirma* vektorning *oxiri* vazifasini o'tar ekan. Qoidani esda saqlash qulay bo'lishini ta'minlash maqsadida, uni sxematik tarzda ko'rsatildi.

Vektorni qo'shishda parallelogramm usulidan foydalansak (178- rasm), ayirma vektor parallelogrammning ikkinchi diagonalidan iborat bo'ladi.

Masala. ABC uchburchak berilgan. Quyidagi: 1) $\overrightarrow{BA}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$ vektorlarni $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ va $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ vektorlar orqali ifodalang.

Yechish. 1) $\overrightarrow{BA}$ va $\overrightarrow{AB}$ — qarama-qarshi vektorlar, shuning uchun $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ yoki $\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$.

2) Uchburchak qoidasiga ko'ra: $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}$. Lekin $\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}$, shuning uchun $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}+\left(-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}$.

Savol, masala va topshiriqlar

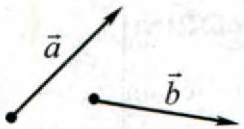
445. 1) Uchburchak va parallelogramm qoidasiga ko'ra vektorlar yig'indisi qanday topiladi?
2) Berilgan vektorga qarama-qarshi vektor deb nimaga aytiladi?
3) Ikki vektor ayirmasi deb nimaga aytiladi?

446. 179- rasmda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar tasvirlangan. $\vec{a}+\vec{b}$ vektorni ikki usul bilan yasang.

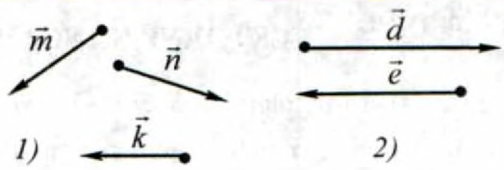
447. 180- rasmda $\vec{m}$, $\vec{n}$ va $\vec{k}$ hamda $\vec{d}$ va $\vec{e}$ vektorlar tasvirlangan. Vektorlarni yasang: 1) $\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$; 2) $\vec{d}+\vec{e}$.

448. 181- rasmda $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ hamda $\vec{d}$ va $\vec{e}$ vektorlar tasvirlangan. Vektorlarni yasang: 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $\vec{e}-\vec{d}$.

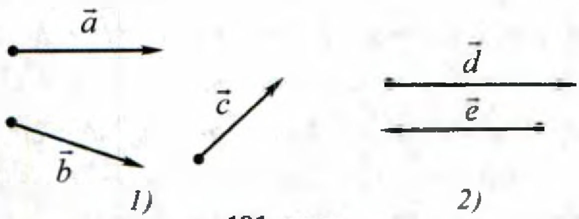
449. $ABCD$ parallelogramm berilgan. $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$ tenglik bajariladimi? Tekshirib ko'ring.



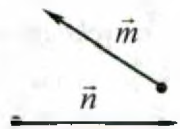
179- rasm.



180- rasm.

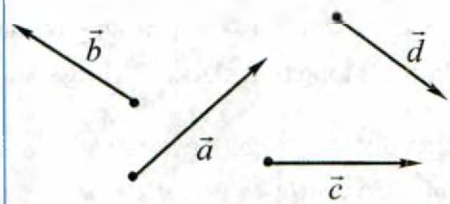


181- rasm.



182- rasm.

450. $ABCD$ rombda: $AD = 20$ sm, $BD = 24$ sm, O – diagonallarining kesishish nuqtasi. $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OB}|$ ni toping.



183- rasm.

451. $ABCD$ parallelogrammda: $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}$ vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

452. E va F – ABC uchburchakning AB va AC tomonlarining o'rtalari. $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{EF}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AE}$ va $\vec{b} = \overrightarrow{AF}$ vektorlar orqali ifodalang.

453. $ABCD$ – ixtiyoriy to'rtburchak. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ ekanini isbotlang.

454. 1) 182- rasmda $\vec{m}$ va $\vec{n}$ vektorlar tasvirlangan. $\vec{m} + \vec{n}$ vektorni ikki usul bilan yasang.

2) 183- rasmda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ hamda $\vec{c}$ va $\vec{d}$ vektorlar tasvirlangan. $\vec{b} - \vec{a}$ va $\vec{c} + \vec{d}$ vektorlarni yasang.

455. $ABCD$ rombda: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$ vektorlarni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

42- mavzu. VEKTORNI SONGA KO'PAYTIRISH

Biror $\vec{a}$ vektorni olamiz va $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ yig'indini topamiz (184- rasm). Bunday yig'indini $3\cdot\vec{a}$ deb belgilaymiz va $\vec{a}$ vektorning 3 songa ko'paytmasi deb atashimiz tabiiy.

1-ta'rif. *Nol bo'lmagan $\vec{a}$ vektorning k songa ko'paytmasi deb shunday $k\cdot\vec{a}$ vektorga aytiladiki, bunda $k\vec{a}$ vektorning moduli $|k|\cdot|\vec{a}|$ songa teng bo'lib, yo'nalishi $k\geq 0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $k<0$ bo'lganda esa $\vec{a}$ vektorning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'ladi. Nol vektorning ixtiyoriy songa ko'paytmasi nol vektor deb hisoblanadi.*

$\vec{a}$ vektorning k songa ko'paytmasi $k\vec{a}$ kabi belgilanadi (son ko'paytuvchi chap tomonga yoziladi). Ta'rifga ko'ra: $|k\vec{a}|=|k|\cdot|\vec{a}|$.

Vektorning songa ko'paytmasi ta'rifidan bevosita quyidagilar kelib chiqadi: 1) *istalgan vektorning nolga ko'paytmasi nol vektor bo'ladi; 2) istalgan son va ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a}$ va $k\vec{a}$ vektorlar kollinear.*

Endi vektorni songa ko'paytirishning asosiy xossalarini sanab o'tamiz.

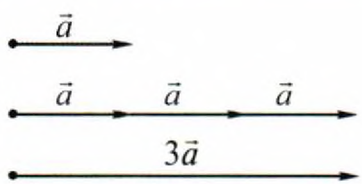
Istalgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorlar va istalgan k, l sonlar uchun quyidagi tengliklar o'rinli:

1°. $(k\cdot l)\vec{a}=k\cdot(l\vec{a})$ — *guruhlash qonuni.*

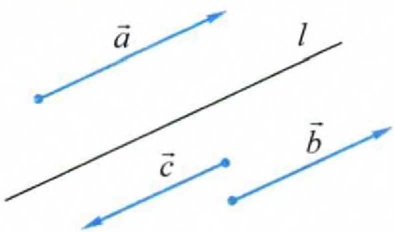
2°. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ — *birinchi taqsimot qonuni.*

3°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ — *ikkinchi taqsimot qonuni.*

4°. $k\cdot\vec{0}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$.



184- rasm.



185- rasm.

2-ta'rif. *Bir to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan vektorlar* ***kollinear vektorlar*** *deb ataladi.*

l to'g'ri chiziq va unga parallel bo'lgan $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin (185- rasm). Ta'rifga ko'ra $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar kollinear vektorlar bo'ladi. Bu yerda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bir xil yo'nalgan, $\vec{c}$ vektor esa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga nisbatan qarama-qarshi yo'nalgan.

Ma'lumki, vektorni songa ko'paytirganda ko'paytma vektorning yo'nalishi berilgan vektorga parallel bo'ladi. Bundan quyidagi muhim xulosani hosil qilamiz:

vektorning songa ko'paytmasi shu vektorga kollinear vektordir.

Teorema.

Vektor o'zining moduliga teng songa bo'linsa, shu vektorga kollinear birlik vektor hosil bo'ladi.

Isbot. $\vec{a}$ vektorning moduli $|\vec{a}|$ bo'lsin. $k = \frac{1}{|\vec{a}|}$ songa $\vec{a}$ vektorning ko'paytmasini qaraylik:

$$|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot |\vec{a}| = 1.$$

Demak, ko'paytma vektor moduli bir birlikka teng.

Moduli birga teng vektorni *birlik vektor* deb ataymiz. Agar $\vec{a}$ vektor bo'yicha yo'nalgan birlik vektorni $\vec{e}$ deb belgilasak, teoremaga ko'ra: $\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ yoki bu tenglikni $|\vec{a}|$ songa ko'paytirsak: $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{e}$.

Vektorlarni o'rganishda katta ahamiyatga ega bo'lgan tenglikni hosil qildik. Har qanday vektor shu vektor moduli bilan o'ziga kollinear birlik vektorning ko'paytmasiga teng ekan.

Savol, masala va topshiriqlar

456. 1) Berilgan vektorning songa ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2) Vektorni songa ko'paytirishning xossalarini ayting.
3) Birlik vektor deganda nima tushuniladi?

457. Uzunligi 2 sm ga teng bo'lgan $\vec{a}$ vektorni chizing. $4\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $3\vec{a}$, $-1{,}5\vec{a}$, $1{,}5\vec{a}$ vektorlarni toping.

458. k ning qanday qiymatlarida $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ va $k\vec{a}$ vektorlar: 1) yo‘nalishdosh; 2) qarama-qarshi yo‘nalgan; 3) teng bo‘ladi?

459. Ifodalarni soddalashtiring: 1) $-0{,}5 \cdot (12\vec{a})$; 2) $3(\vec{a} + \vec{b})$; 3) $3\vec{b} - \vec{b}$.

460. $ABCD$ parallelogrammda O — diagonallarning kesishish nuqtasi, K nuqta CD tomonning o‘rtasi. $\overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{AK}$ vektorlarni $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

461. 1) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; 2) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ tengliklar ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun to‘g‘ri. Shuni isbotlang.

Isbot. 1- hol. Agar $\vec{a} = \vec{0}$ bo‘lsa, u holda har qaysi tenglikning ikkala qismi — nol vektorlar bo‘ladi. Shuning uchun tengliklar o‘rinli.

2- hol. $\vec{a} \neq \vec{0}$ bo‘lsin.

1) Vektorni songa ko‘paytirish ta’rifiga ko‘ra: $|1 \cdot \vec{a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. 1 soni esa musbat, shuning uchun $1 \cdot \vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlarlarning yo‘nalishi bir xil. Teng vektorlarning ta’rifiga ko‘ra, $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ekani kelib chiqadi.

2) Vektorni ... ko‘paytirish ta’rifiga ko‘ra: $|(-1) \cdot \vec{a}| = |...| \cdot |...| = ... \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$. $-1 < 0$, shuning uchun $(-1) \cdot \vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar — qarama-qarshi ... bo‘ladi. Qarama-qarshi vektorlarning ta’rifiga ko‘ra: $|-\vec{a}| = |\vec{a}|$ va $-\vec{a} \uparrow\downarrow ...$. Va demak, $|(-1) \cdot \vec{a}|$ ... $|-\vec{a}|$ va $(-1)\vec{a} \uparrow\uparrow$ ... , ya’ni $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ ekan.

462. k ning qanday qiymatlarida quyidagi mulohazalar to‘g‘ri bo‘ladi: 1) $|k\vec{a}| < |\vec{a}|$; 2) $|k\vec{a}| > |\vec{a}|$; 3) $|k\vec{a}| = |\vec{a}|$, bu yerda $\vec{a}$ — nol bo‘lmagan vektor?

463. $ABCD$ — parallelogramm, P — diagonallarining kesishish nuqtasi, N nuqta BC tomonning o‘rtasi. $\overrightarrow{DP}$ va $\overrightarrow{DN}$ vektorlarni $\overrightarrow{DA} = \vec{p}$ va $\overrightarrow{DC} = \vec{m}$ vektorlar orqali ifodalang.

464. 1) Uzunligi 3 sm ga teng bo‘lgan $\vec{a}$ vektorni chizing. $2{,}5\vec{a}$, $-4\vec{a}$, $-0{,}5\vec{a}$ vektorlarni toping.

2) $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{a}$. $2\vec{m} + 3\vec{n}$ vektorni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

465. Agar: 1) $\vec{a} = \vec{0}$; 2) $k = 0$ bo‘lsa, $k\vec{a}$ ko‘paytma nimaga teng?

43- mavzu.

VEKTORLARNING MASALALARNI YECHISHGA TATBIG'I

Geometrik masalalarni yechishda va teoremalarni isbotlashda vektorlardan keng foydalaniladi.

1. Masala. *C* nuqta *AB* kesmaning o'rtasi, *O* nuqta esa tekislikning ixtiyoriy nuqtasi. $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ ekanini isbot qiling (186- rasm).

Yechish. 1-usul. Uchburchak qoidasiga ko'ra:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} \quad \text{va} \quad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}.$$

Bu ikki tenglikni qo'shib, ega bo'lamiz:

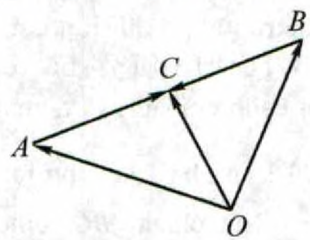
$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}).$$

C nuqta *AB* kesmaning o'rtasi bo'lganligidan, u holda $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = \vec{0}$, chunki qarama-qarshi vektorlarning yig'indisi nol vektorga teng.

Shunday qilib, ega bo'lamiz:

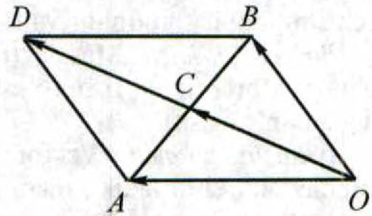
$$2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \text{yoki}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}).$$



186- rasm.

2-usul. *OAB* uchburchakni parallelogrammga to'ldiramiz (187- rasm). $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ (parallelogramm qoidasiga ko'ra). Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi, shuning uchun $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$ va $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OC}$.



187- rasm.

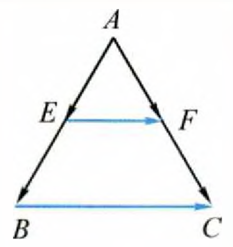
Demak, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OC}$. Bundan: $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

2. Uchburchakning o‘rta chizig‘i haqidagi teorema.

Teorema.

Uchburchakning o‘rta chizig‘i uning uchinchi tomoniga parallel, uning uzunligi esa bu tomon uzunligining yarmiga teng.

I s b o t. EF kesma ABC uchburchakning o‘rta chizig‘i (188- rasm). $EF \parallel BC$ va $EF = \frac{1}{2}BC$ ekanini isbotlaymiz.



188- rasm.

Dastlab teoremani vektor ko‘rinishida yozamiz. E nuqta ABC uchburchak AB tomonining o‘rtasi, F esa AC tomonining o‘rtasi bo‘lsin (188- rasm). Unda

$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AB}$ va $\overline{AF} = \frac{1}{2}\overline{AC}$.

Bular teorema shartining vektor ko‘rinishidagi yozuvidir.

Endi uni isbotlashga o‘tamiz.

$$\overline{EF} = \overline{AF} - \overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Shunday qilib, $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$ vektor tenglikni hosil qildik. Endi uni geometrik talqin qilish qoldi, xolos.

B i r i n c h i d a n, bu tenglikdan $\overline{EF}$ va $\overline{BC}$ vektorlar yo‘nalishdosh ekani kelib chiqadi, va demak, $EF \parallel BC$.

I k k i n c h i d a n, bu tenglikdan $|\overline{EF}| = \frac{1}{2}|\overline{BC}|$ kelib chiqadi. Bundan esa EF – o‘rta chiziq BC tomonning yarmiga tengligi ravshan. Shunday qilib, uchburchakning o‘rta chizig‘i haqidagi har ikkala tasdiqni isbotladik.

Keltirilgan isbotdan ko‘rinib turibdiki, masala va teoremalarni vektor usuli bilan yechish masalalarni algebraik yechishga o‘xshaydi. Bu masalani yechishning bir tomonidir va u uch bosqichdan iborat.

Birinchi bosqich. Masala (teorema) shartini vektor ko‘rinishida yozish va qulay vektorlarni kiritish (o‘xshashlik – noma’lumlarni kiritish va algebraik tenglamani tuzish).

Ikkinchi bosqich. Vektor algebrasining vositalari orqali masala sharti shunday almashtiriladiki, masalani vektor ko‘rinishida yechish imkoniyati bo‘lsin (o‘xshashlik – algebraik tenglamani yechish).

Uchinchi bosqich. Olingan vektor munosabat dastlabki atamalarda talqin qilinadi (o‘xshashlik – tenglamani algebraik yechgandan so‘ng, javobni yozish).

Savol, masala va topshiriqlar

466. C nuqta AB tomonning o'rtasi. Ifodalang:

1) $\overrightarrow{AC}$ vektorni $\overrightarrow{CB}$ vektor orqali; 2) $\overrightarrow{AB}$ vektorni $\overrightarrow{CB}$ vektor orqali; 3) $\overrightarrow{AC}$ vektorni $\overrightarrow{BA}$ vektor orqali.

467. C nuqta AB kesmani A uchidan boshlab hisoblaganda $1:3$ nisbatda bo'ladi. Ifodalang: 1) $\overrightarrow{AC}$ vektorni $\overrightarrow{CB}$ vektor orqali; 2) $\overrightarrow{AB}$ vektorni $\overrightarrow{CA}$ vektor orqali; 3) $\overrightarrow{CB}$ vektorni $\overrightarrow{BA}$ vektor orqali.

468. AB va CD kesmalar: 1) $AB = CD$; 2) $AB = 2CD$ ekani vektor tilida qanday yoziladi?

469. AA_1, BB_1 va CC_1 kesmalar $-ABC$ uchburchakning medianalari. $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ vektorlarni $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ va $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ vektorlar orqali ifodalang.

470. $ABCD$ — parallelogramm va uning diagonallari kesishgan O nuqta berilgan. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ ekanini isbotlang.

471. AB va CD kesmalar O nuqtada kesishadi. $AO = 2OB$ va $OD = 2OC$. Vektordan foydalanib, $BC \parallel AD$ va $BC = \frac{1}{2}AD$ ekanini isbot qiling.

472. $ABCD$ — parallelogramm va shu parallelogrammdan tashqarida yotuvchi ixtiyoriy O nuqta berilgan.

1) $\overrightarrow{OD}$ vektorni $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ va $\overrightarrow{OC}$ vektorlar orqali ifodalang.

2) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ ekanini isbotlang.

473. E va F nuqtalar $ABCD$ to'rtburchakning AC va BD diagonallarining o'rtasi. $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$ ekanini isbotlang.

474. $ABCD$ parallelogramm diagonallari O nuqtada kesishadi, P nuqta OB ning o'rtasi. $\overrightarrow{AP}$ vektorni $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ va $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ vektorlar orqali ifodalang.

475. $ABCD$ rombda N nuqta CD tomonning o'rtasi. $\overrightarrow{AN}$ vektorni $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar orqali ifodalang.

476. ABC uchburchakda AA_1 — mediana, O — AA_1 ning o'rtasi. $\overrightarrow{BO}$ vektorni $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ va $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ vektorlar orqali ifodalang.

44- mavzu. VEKTORNING KOORDINATALARI

Tekislikda xOy Dekart koordinatalar sistemasi berilgan, ya'ni koordinatalar boshi O nuqta, koordinata o'qlarining yo'nalishi va masshtab birligi — birlik kesma berilgan bo'lsin (189- rasm). Bunda tekislikdagi ixtiyoriy A nuqta o'zining abssissasi x va ordinatasi y ga ega bo'ladi: $A(x;\ y)$. Moduli bir birlikka ega bo'lgan hamda yo'nalishi Ox o'qi bo'yicha yo'nalgan vektorni $\vec{i}$ bilan, xuddi shuningdek, Oy o'qi bo'yicha yo'nalgan vektorni $\vec{j}$ bilan belgilaymiz.

Tekislikda koordinatalari $(x;\ y)$ bo'lgan A nuqta berilgan bo'lsin. OA_xA uchburchakni qaraylik. Bu uchburchakda $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_x} + \overrightarrow{A_xA}$. Ammo $OA_x = x$, $OA_y = y$ bo'lgani uchun $\overrightarrow{OA_x} = x \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{A_xA} = y \cdot \vec{j}$ bo'ladi. Bundan

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} \qquad (1)$$

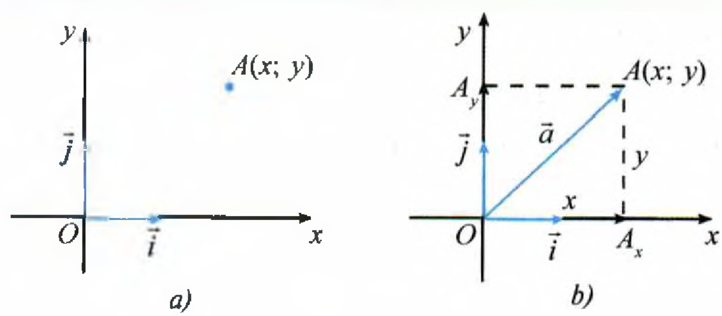
tenglikni hosil qilamiz. Bu (1) tenglik vektorning *koordinata ifodasi* deb ataladi.

Demak, boshi koordinatalar boshida, uchi $A(x;\ y)$ nuqtada bo'lgan vektorni koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ vektorlar orqali (1) ko'rinishda yozush mumkin ekan.

Bunda $(\vec{i};\ \vec{j})$ vektorlar juftligi *bazis vektorlar*, x va y sonlar esa $\vec{a}$ vektorning *koordinatalari* deb ataladi.

Agar vektorning (1) koordinata ifodasi ma'lum bo'lsa, vektor koordinatalari bilan berilgan deyiladi va qisqacha $\vec{a}(x;\ y)$ shaklida yoziladi:

$$\vec{a}(x; y) = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j}\,. \qquad (2)$$

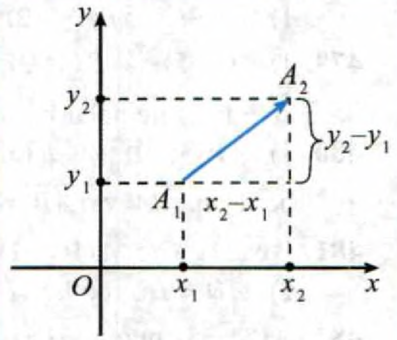


189- rasm.

Ta'rif. *Agar* $A_1(x_1; y_1)$ *va* $A_2(x_2; y_2)$ *bo'lsa,* $x_2 - x_1$ *va* $y_2 - y_1$ *sonlar* $\overline{A_1A_2}$ *vektorning koordinatalari bo'ladi* (190- rasm).

Belgilanishi: $\overline{A_1A_2}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1) = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$.

Qoida. *Vektorning koordinatalarini topish uchun uning oxirining koordinatalaridan boshining mos koordinatalarini ayirish kifoya.*



190- rasm.

Masalan, $\overline{OA}$ vektorning koordinatalari vektor oxiri A ning koordinatalari bilan to'la aniqlanadi, ya'ni vektor oxirining koordinatalariga teng bo'ladi.

Agar $A(x;\ y)$ bo'lsa, $\overline{OA} = (x;\ y)$ bo'ladi.

1-xulosa. Agar vektor oxirining koordinatalari vektorning koordinatalari bilan teng bo'lsa, u holda berilgan vektorning boshi koordinatalar boshida bo'ladi.

2-xulosa. Agar $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektor bilan uning oxiri bo'lgan $B(x_2;\ y_2)$ nuqtasi koordinatalari berilgan bo'lsa, u holda vektor boshi $A(x_1;\ y_1)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun B nuqtaning koordinatalaridan $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektorning koordinatalarini ayirish kifoya:

$$x_1 = x_2 - a_1;\ y_1 = y_2 - a_2.$$

3-xulosa. Agar $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektor bilan uning boshi bo'lgan $A(x_1;\ y_1)$ nuqtasi koordinatalari berilgan bo'lsa, u holda vektor oxiri $B(x_2;\ y_2)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun A nuqtaning koordinatalariga $\vec{a}(a_1;\ a_2)$ vektorning mos koordinatalarini qo'shish kifoya:

$$x_2 = x_1 + a_1;\ y_2 = y_1 + a_2.$$

Masala. $A(-1;\ 5)$ nuqta $\vec{a}(2;\ -3)$ vektorning boshi bo'lsa, bu vektor oxiri B ning koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan ma'lumotlarni so'nggi munosabatlarga qo'yib, izlanayotgan koordinatalarni topamiz: $x_2 = -1 + 2 = 1$, $y_2 = 5 + (-3) = 2$.

Javob: $B(1;\ 2)$.

Savol, masala va topshiriqlar

477. 1) Koordinatalar o'qidagi birlik vektorlar qanday begilanadi?
2) Boshi koordinatalar boshida bo'lgan vektorning koordinatalari nimaga teng?

478. Vektorlarning koordinatalarini yozing:
1) $\vec{a} = 4\vec{i} - 5\vec{j}$; 2) $\vec{a} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$; 3) $\vec{b} = -7\vec{j}$; 4) $\vec{c} = -3\vec{i}$.

479. 1) $A(2;\ 5)$ va $B(4;\ 2)$; 2) $A(3;\ -4)$ va $B(1;\ -6)$; 3) $A(-5;\ -3)$ va $B(-1;\ 3)$ nuqtalar berilgan. $\overline{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

480. 1) $A(-3;\ 0)$ va $B(5;\ -4)$; 2) $A(0;\ -4)$ va $B(7;\ -2)$ nuqtalar berilgan. $\overline{BA}$ va $\overline{AB}$ vektorlarning koordinatalarini toping.

481. Berilgan: $A(1;\ -1)$, $B(2;\ 0)$, $C(-1;\ 3)$. Agar: 1) $\overline{BD} = \overline{AC}$; 2) $\overline{AD} = \overline{BC}$ bo'lsa, D nuqtaning koordinatalarini toping.

482. $A(5;\ -3)$ nuqta $\vec{a}(-7;\ -8)$ vektorning boshi bo'lsa, bu vektor oxiri (B) ning koordinatalarini toping.

483. $A(-1;\ -3)$, $B(2;\ -4)$, $C(-3;\ -1)$ va $D(5;\ 2)$ nuqtalar berilgan. $\overline{AC}$ va $\overline{DB}$ vektorlar tengmi?

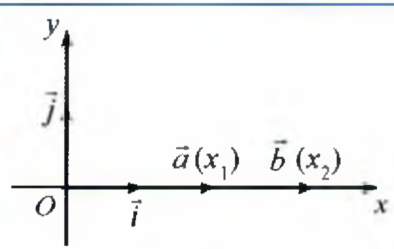
484. Agar: 1) $A(-2;\ -3)$, $B(-3;\ -1)$; 2) $A(m;\ n)$, $B(-m;\ -n)$ bo'lsa, $\overline{BA}$ vektor koordinatalari nimaga teng bo'ladi?

45- mavzu. KOORDINATALARI BERILGAN VEKTORLAR USTIDA AMALLAR

Bizga $\vec{a}(x_1,\ y_1)$ va $\vec{b}(x_2,\ y_2)$ berilgan bo'lsin, ya'ni vektorlar koordinatalari bilan berilgan. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo'shish, ayirish va songa ko'paytirish amallari bilan tanishamiz.

1. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni qo'shish.

Avval sodda holni qaraylik. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar Ox o'qiga kollinear bo'lsin. Bunda $y_1 = y_2 = 0$, $\vec{a}(x_1) = x_1 \cdot \vec{i}$ va $\vec{b}(x_2) = x_2 \cdot \vec{i}$ (191- rasm).



191- rasm.

Bu yerda $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning modullari yig'indisiga teng bo'ladi va $\vec{a} + \vec{b}$ vektor ham Ox o'qiga kollinear. Shuning uchun $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{i}$.

Demak, yig'indi vektor $\vec{a} + \vec{b}$ vektorning koordinatasi qo'shiluvchi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning mos koordinatalari yig'indisiga teng ekan. Kollinear vektorlarni qo'shish uchun ularning mos koordinatalarini qo'shish kifoya.

Endi ixtiyoriy $\vec{a}(x_1, y_1)$ va $\vec{b}(x_2, y_2)$ vektorlar yig'indisini ko'raylik:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}) + (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}) = x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} =$$
$$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2).$$

Demak, $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j}) + (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j}) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2)$.

Shunday qilib, *vektorlarni qo'shish uchun ularning mos koordinatalarini qo'shish kifoya ekan.*

1-masala. $\vec{a}(3; 5)$ va $\vec{b}(2, 7)$ vektorlar yig'indisini toping.

Yechish. $\vec{a}(3;\ 5) = 3\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{b}(2;\ 7) = 2\vec{i} + 7\vec{j}$;

$$\vec{a} + \vec{b} = (3+2)\vec{i} + (5+7)\vec{j} = 5\vec{i} + 12\vec{j} = (5;\ 12).$$

Bu masala yechimini koordinatalar tekisligida tekshirib ko'ring.

2. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni ayirish.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarni ayirish uchun ularning mos koordinatalarini ayirish kifoya, ya'ni:

$$\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2;\ y_1 - y_2).$$

2-masala. $\vec{a}(-3; 5)$ va $\vec{b}(3; -3)$ vektorlar ayirmasini toping.

Yechish. $\vec{a} - \vec{b} = (-3 - 3; 5 - (-3)) = (-6; 8)$.

3. Koordinatalari bilan berilgan vektorni songa ko'paytirish.

Koordinatalari bilan berilgan vektorni songa ko'paytirish amali bilan tanishamiz.

$\vec{a}(x_1, y_1)$ vektorni k songa ko'paytmasini topamiz:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) = kx_1\vec{i} + ky_1\vec{j} = \vec{a}(kx_1;\ ky_1).$$

Demak, *vektorni songa ko'paytirish uchun uning koordinatalarini shu songa ko'paytirish yetarli ekan.*

3-masala. $\vec{a}(3;\ 5)$ vektorga qarama-qarshi vektorni toping.

Yechish. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor $\vec{b}=-\vec{a}=(-1)\vec{a}=$ $=-1\cdot(3;\ 5)=(-1\cdot3;\ -1\cdot5)=(-3;\ -5)$ bo'ladi.

Demak, $\vec{a}(3;\ 5)$ va $\vec{b}(-3;\ -5)$ vektorlar qarama-qarshi vektorlardir.

Umuman: $\vec{b}=-\vec{a}=-(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j})=-x_1\cdot\vec{i}-y_1\cdot\vec{j}=(-x_1;\ -y_1)$.

4-masala. Agar $\vec{a}(-3;\ 4)$ bo'lsa, $4\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish. $4\vec{a}=(4\cdot(-3);\ 4\cdot4)=(-12;\ 16)$.

Savol, masala va topshiriqlar

485. 1) Vektorning koordinatalari deganda nimani tushunasiz?
2) Koordinatalari berilgan vektorlar ustida chiziqli amallar qanday bajariladi?

486. Agar $\vec{a}(-4;\ 8)$ va $\vec{b}(1;\ -4)$ bo'lsa, shu vektorlar: 1) yig'indisining; 2) ayirmasinining koordinatalarini toping.

487. $\vec{a}(-4;\ 8)$ va $\vec{b}(1;\ -4)$ vektorlar berilgan. 1) $2\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-3\vec{b}$; 3) $2\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-2\vec{b}-4\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

488. $\vec{a}(-2;\ 6)$ va $\vec{b}(-2;\ 4)$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{a}+\vec{b}$; 2) $\vec{a}-\vec{b}$; 3) $\vec{b}-\vec{a}$; 4) $-\vec{a}-\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

489. $\vec{a}(2;\ -3)$ va $\vec{b}(-2;\ -3)$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+\vec{b}$; 3) $\vec{c}=-3\vec{a}-2\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

490. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ va $\vec{b}=2\vec{j}$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-4\vec{a}+3\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

491. $\vec{a}=-2\vec{i}+2\vec{j}$ va $\vec{b}=-3\vec{i}$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{c}=3\vec{a}-2\vec{b}$; 2) $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

492. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ va $\vec{b}=2\vec{j}$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-\vec{a}-2\vec{b}$; 3) $\vec{c}=\vec{a}-5\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

46- mavzu. VEKTORLARNING SKALAR KO‘PAYTMASI

1. Ikki vektor skalar ko‘paytmasining ta’rifi. Vektor moduli va yo‘nalishi bilan to‘la aniqlanadigan kattalik ekanini yana bir bor eslatamiz. Vektorlarning ko‘paytmasi tushunchasi ko‘paytirish natijasida hosil bo‘ladigan natijaning qanday bo‘lishiga bog‘liq bo‘ladi. Ko‘paytirish natijasi vektor yoki son bo‘lishi mumkin. Biz vektorni ko‘paytirish natijasi son bo‘ladigan hol bilan tanishamiz. Natija skalar (son) bo‘lgani uchun bu ko‘paytma vektorlarning skalar ko‘paytmasi deb nomlangan.

Ta’rif. $\vec{a}(x_1; y_1)$ va $\vec{b}(x_2; y_2)$ *vektorlarning skalar ko‘paytmasi deb,* $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ *songa aytiladi.*

Shunday qilib, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 .$$

Bu koordinatalari bilan berilgan *ikki vektorning skalar ko‘paytmasini hisoblash* formulasidir.

2. Vektor uzunligini topish. Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalar ko‘paytmasini hisoblash formulasi yordamida vektorlarga oid turli kattaliklarni aniqlash mumkin.

Bizga $\vec{a}(x_1, \ y_1)$ vektor berilgan bo‘lsin. Vektorlarning skalar ko‘paytmasi ham sonlarning ko‘paytmasi singari yozuvdan foydalaniladi. $\vec{a} \cdot \vec{a}$ skalar ko‘paytma $\vec{a}^2$ kabi belgilanadi va *skalar kvadrat* deb ataladi. Ravshanki, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$. Bundan,

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}, \qquad (1)$$

ya’ni vektorning moduli o‘zini-o‘ziga skalar ko‘paytmasidan (vektor kvadratidan) olingan arifmetik kvadrat ildizga teng ekanligi kelib chiqadi.

Vektor koordinatalari bilan berilgani uchun:

$$\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 . \qquad (2)$$

(1) va (2) tengliklardan ega bo‘lamiz:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} . \qquad (3)$$

Bu *vektorning modulini hisoblash* formulasidir.

Masala. $\vec{a}(-12;\ 5)$ vektorning modulini toping.

Yechish. $|\vec{a}| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$.

Vektorlar koordinatalari bilan berilganda ularning skalar ko'paytmasi va modulini hisoblash mumkin.

Vektorlarning skalar ko'paytmasi ta'rifidan $\vec{a}(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}(x_2;\ y_2)$ va $\vec{c}(x_3;\ y_3)$ vektorlar uchun

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

tenglik o'rinli ekani kelib chiqadi. Mustaqil isbot qiling.

Savol, masala va topshiriqlar

493. 1) Vektorlarning skalar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2) Vektorning uzunligi qanday topiladi?

494. Vektorlarning skalar ko'paytmasini toping:

1) $\vec{a}(2;\ -3)$ va $\vec{b}(-2;\ 3)$; 3) $\vec{m}(-1;\ 5)$ va $\vec{n}(-2;\ 4)$;

2) $\vec{a}(-3;\ -4)$ va $\vec{b}(5;\ -6)$; 4) $\vec{m}(7;\ 2)$ va $\vec{n}(-4;\ -3)$.

495. 1) $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ va $C(6;\ 14)$ nuqtalar berilgan. $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ ni toping.
2) $B(1;\ 2)$ va $C(-2;\ 6)$ nuqtalar orasidagi masofaning yarmini toping.

496. 1) $\vec{a}(7;\ 2)$, $\vec{b}(0;\ -1)$; 2) $\vec{a}(-4;\ -6)$, $\vec{b}(2;\ -1)$; 3) $\vec{a}(5;\ -8)$, $\vec{b}(-4;\ 2)$ vektorlar berilgan. $2\vec{a} + 4\vec{b}$ vektorning modulini toping.

497. Agar: 1) $\vec{a}(-4; x)$ vektorning moduli 5 ga; 2) $\vec{a}(12; -x)$ vektorning moduli 13 ga teng bo'lsa, x ning qiymatini toping.

498. Vektorlarning skalar ko'paytmasini toping:

1) $\vec{a}(-4;\ 5)$ va $\vec{b}(3;\ 7)$; 3) $\vec{m}(-2;\ 0)$ va $\vec{n}(8;\ -9)$;

2) $\vec{a}(-3;\ -5)$ va $\vec{b}(7;\ -4)$; 4) $\vec{m}(6;\ 2)$ va $\vec{n}(-3;\ 9)$.

499. $\vec{a}(-1;\ -4)$ va $\vec{b}(-2;\ 3)$ vektorlar berilgan. $-2\vec{a} + \vec{b}$ vektorning uzunligini toping.

500. $\vec{a}(5;\ 1)$ va $\vec{b}(-2;\ 3)$ vektorlar berilgan. $|\vec{a} + \vec{b}|$ ni hisoblang.

47- mavzu.

VEKTORLARNING FIZIK VA GEOMETRIK TALQINLARI

1. Jismga ta'sir etadigan kuchni (qo'yilgan kuchni) yo'nalishi ta'sir etish yo'nalishi bilan bir xil, absolut qiymati esa kuch miqdoriga proporsional vektor bilan tasvirlash qulay. Tajriba shuni ko'rsatadiki, kuchlarni bunday tasvirlash usulida jismga bir nuqtada ta'sir qiluvchi ikki yoki bir nechta kuchning teng ta'sir etuvchisi shu kuchlarga mos vektorlarning yig'indisi bilan tasvirlanadi. 192- rasmda jismga A nuqtada $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bilan tasvirlangan ikkita kuch ta'sir etadi. Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

vektor bilan tasvirlanadi.

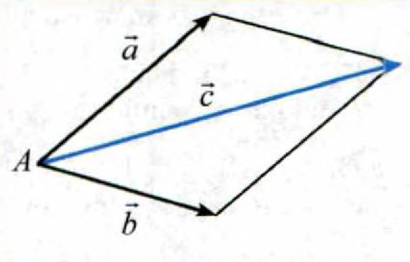
Kuchni berilgan ikki yo'nalishda ta'sir etuvchi kuchlarning yig'indisi shaklida tasvirlash *kuchni yo'nalishlar bo'yicha yoyish (ajratish)* deyiladi.

2. Fizikada jismning *ilgarilama harakati* deb shunday harakatga aytiladiki, bunda jismning barcha nuqtalari bir xil vaqt oralig'ida bir xil yo'nalishda bir xil masofaga siljiydi. Shunday qilib, fizikadagi *siljish vektori* darsligimizda qabul qilingan ma'nodagi vektor ekan. Farq shundaki, geometriya darsligida faqat tekislikdagi vektorlar to'g'risidagina gap yuritiladi, fiziklar esa boshidanoq fazodagi vektorlar (kollej va akademik litseylarda tanishasiz) to'g'risida ham mulohaza yuritadilar.

3. Fizikada «vektor» so'zi ancha keng ma'noda ishlatiladi. Masalan, tezlikni vektor deb yuritiladi. Ammo, geometrik vektorning uzunligi metrlarda, tezlikning absolut qiymati esa sekundiga metrlarda o'lchanishining o'zidanoq tezlikning geometriyada qabul qilingan ma'nodagi vektor emasligi ko'rinib turibdi. Biz geometriyada tezlikni vektor emas, balki *vektor kattalik* deymiz.

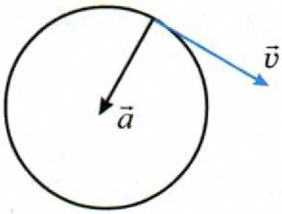
Umuman, vektor kattaliklar, o'zlarining modulidan tashqari, yo'nalishi bilan aniqlanadi. Ma'lum masshtab tanlab olinganda vektor kattaliklar geometrik vektorlar bilan tasvirlanadi.

Bunda vektor kattaliklarni qo'shishga ularni tasvirlovchi geometrik vektorlarni qo'shish, vektor kattaliklarni sonlarga ko'paytirishga esa ularni tasvirlovchi geometrik vektorlarni o'sha sonlarga ko'paytirish mos keladi.



192- rasm.

Bir misol ko'raylik. 193- rasmda $\vec{v}$ vektor aylanma harakatning tezligini, $\vec{a}$ vektor esa tezlanishni ifodalashi mum-



193- rasm.

kin. Biroq, bu vektorlarni fizika nuqtayi nazardan qo'shish ma'noga ega emas.

Shunday bo'lsa-da, fizikada tezlik yoki tezlanishlarni vektorlar deb to'g'ridan-to'g'ri aytiladi. Gap nima to'g'risida ketayotganligi aniq tasavvur qilinsa, bunday so'z erkinligi umumiylikka hech bir ziyon keltirmaydi. Xuddi shunga o'xshash biz o'z vaqtida uchburchak tomonining uzunligini qisqalik uchun, oddiygina qilib uning tomoni deb etishga kelishib olgan edik va hokazo.

7- § ga doir qo'shimcha mashqlar

501. Quyidagi da'vo to'g'rimi: ixtiyoriy ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ tenglikni qanoatlantiradigan k son mavjud bo'lganda va faqat shundagina kollinear bo'ladi?

502. Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslariga parallel va ular uzunligining yarmiga teng ekanini isbot qiling.

503. ABC uchburchak berilgan. A_1, B_1, C_1 – uchburchak BC, AC va AB tomonlarining o'rtalari, O – tekislikning ixtiyoriy nuqtasi. Isbotlang: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$.

504. D va E nuqtalar ABC uchburchakning AB va BC tomonlarining o'rtalari. $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$ ekanini isbotlang.

505. K nuqta $ABCD$ parallelogramm AD tomonining o'rtasi. $\overrightarrow{KC}$ vektorni $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AD}$ vektorlar orqali ifodalang.

506. B (4; 2) nuqta $\vec{a}(-2;\ 3)$ vektorning oxiri bo'lsa, bu vektor boshi (A) ning koordinatalarini toping.

507. A (−2; 3) nuqta $\vec{a}(-3;\ 8)$ vektorning boshi bo'lsa, bu vektor oxiri (B) ning koordinatalarini toping.

508. Agar: 1) A (0; 1), B (1; 0); 2) A (−2; 1), B (−4; 3) bo'lsa, $\overrightarrow{AB}$ vektor koordinatalari nimaga teng bo'ladi?

509. $\vec{a}(-4;\ 4)$ va $\vec{b}(-4;\ 5)$ vektorlar berilgan. $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

510. $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ va $C(6;\ 14)$ nuqtalar berilgan. $\overline{AB}+\overline{AC}$ vektorning koordinatalarini toping.

511. $\vec{a}=-5\vec{i}-\vec{j}$ va $\vec{b}=-1{,}5\vec{j}$ vektorlar berilgan. 1) $\vec{c}=\vec{a}+4\vec{b}$; 2) $\vec{c}=-2\vec{a}+3\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

512. Agar: 1) $\vec{a}(2;\ 1)$ va $\vec{b}(-3;\ 4)$; 2) $\vec{a}(2;\ -0{,}5)$ va $\vec{b}(3;\ 2)$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar skalar ko'paytmasini toping.

513. Tekislikda to'rtta A, B, C va D nuqtalarni belgilang. Isbotlang: $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{DC}$. Xuddi shunga o'xshash tenglik tuzing.

514. Agar: 1) $A(0;\ 1)$ va $B(1;0)$; 2) $A(-2;\ 1)$ va $B(-4;\ 2)$; 3) $A(-3;\ -1)$ va $B(-3;\ -12)$; 4) $A(p;\ q)$ va $B(-p;\ -q)$ bo'lsa, $\overline{AB}$ vektorning koordinatalarini va uzunligini toping.

7- TEST

1. $ABCD$ — parallelogramm. O — AC va BD diagonallarning kesishish nuqtasi. $\overline{BC}+\overline{OA}$ ni toping.

A) $\overline{OC}$; B) $\overline{BO}$; C) $\overline{OB}$; D) $\overline{CO}$.

2. $MKPC$ — parallelogramm. E — MP va KC diagonallarning kesishish nuqtasi. $\overline{MK}-\overline{EP}$ ni toping.

A) $\overline{MK}$; B) $\overline{KC}$; C) $\overline{CE}$; D) $\overline{EK}$.

3. PE — MPK uchburchakning medianasi. $\overline{EK}-\overline{MP}$ ni toping.

A) $\overline{PK}$; B) $\overline{PE}$; C) $\overline{EP}$; D) $\overline{KP}$.

4. AD — ABC uchburchakning medianasi. $\overline{CA}-\overline{DB}$ ni toping.

A) $\overline{BA}$; B) $\overline{AB}$; C) $\overline{DA}$; D) $\overline{AB}$.

5. $\vec{a}(7;\ 3)$ va $\vec{b}(5;\ 2)$ vektorlar berilgan. $|\vec{a}+\vec{b}|$ ni hisoblang.

A) 9; B) 5; C) 8; D) 13.

6. $A(2;\ 4)$, $B(3;\ 6)$ va $C(6;\ 14)$ nuqtalar berilgan. $|\overline{AB}+\overline{AC}|$ ni hisoblang.

A) 14; B) 12; C) 10; D) 13.

7. $\vec{a}(-3;\ 1)$ va $\vec{b}(5;\ -6)$ vektorlar berilgan. $\vec{c}=\vec{b}-3\vec{a}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) $(14;\ -9)$; B) $(4;\ -3)$; C) $(14;\ -3)$; D) $(9;\ 3)$.

8. $A(-3;\ 0)$ va $B(-5;\ 4)$ nuqtalar berilgan. $\overrightarrow{BA}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) $(-8;\ -4)$; B) $(-8;\ 4)$; C) $(2;\ -4)$; D) $(8;\ -4)$.

9. $\vec{a}(2;-3)$ va $\vec{b}(-2;-3)$ vektorlar berilgan. $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

A) $(-3;\ 6)$; B) $(6;\ 3)$; C) $(2;\ -3)$; D) $(-2;\ -9)$.

10. $\vec{a}(3;2)$ va $\vec{b}(0;-1)$ vektorlar berilgan. $-2\vec{a}+4\vec{b}$ vektorning modulini toping.

A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

Tarixiy ma'lumotlar

Vektor tushunchasi matematikaga, jumladan geometriyaga yaqinda kirgan. XIX asrning o'rtalarida vektor tushunchasi bir vaqtda bir nechta matematikning ishlarida uchraydi. Tekislikda vektorlar bilan ish ko'rishni ilk bor (1835-yili) italiyalik olim **Bellivitis** (1803—1880) boshlab berdi. Bundan tashqari, **K. Gauss** (1777—1855) 1831- yili «Bikvadratik solishtirmalar nazariyasi» nomli asari hamda **Y. Argan** (1768—1822) va **K. Vessel** (1745—1818)ning kompleks sonlarni geometrik tasvirlashga doir ishlarida vektor tushunchasi aytib o'tilgan. Nihoyat, **V. Gamilton** (1805—1865) va **R. Grassman** (1854—1901)larning vektorlar ustida amallar bajarishga doir ishlari vujudga keldi. Birinchi bo'lib, Gamilton vektor va skalar kattaliklarni farq qilishni tushuntirdi. Gamiltonning o'sha ishida «skalar», «vektor» atamalari yuzaga keldi. «Vektor» atamasini Gamilton lotincha *vehere* — «tashimoq», «sudramoq» so'zidan hosil qilgan (1845), *vektor* — «tashuvchi», «eltuvchi» demakdir.

Eng qadimgi belgilash harf ustiga chiziq qo'yish bo'lib, 1806- yili Argan yo'nalgan kesmalarni shunday belgilagan. Vektorlarning boshi va oxirini ko'rsatish uchun uni **A. Myobius** (1790—1868) AB ko'rinishda belgilagan. Grassman vektorlarni «kesmalar» deb atagan, u koordinata o'qlari bo'yicha yo'nalgan e_1, e_2 birlik vektorlarni va vektorlarni $x_1e_1+x_2e_2$ ko'rinishida tasvirlashni tavsiya qilgan. Gamilton va **J. Gibss** (1839—1903) vektorlarni grekcha harflar bilan belgilagan. Vektorlarni qora harflar bilan belgilashni 1891- yili **A. Xevisayd** (1850—1925) taklif etgan.

Vektorning uzunligini $|AB|$ ko'rinishda belgilashni 1905- yili **R. Gans** (1880) kiritgan. «Modul» so'zi ancha oldin paydo bo'lgan. Uni 1814- yili lotincha *modulus* — «o'lchov» so'zidan Argan hosil qilgan. Keyinchalik uni **A. Koshi** (1789—1857) ishlatgan. Bu atama uzil-kesil XX asrda qo'llanila boshlangan.

8- SINFDA O'TILGAN MAVZULARNI TAKRORLASH UCHUN MASHQLAR

515. $ABCD$ parallelogrammda: 1) agar BC tomon AB dan 8 sm uzun, perimetri esa 64 sm ga teng bo'lsa, tomonlarni; 2) agar $\angle A = 55°$ bo'lsa, burchaklarni toping.

516. Agar parallelogrammning perimetri 2 m ga teng va: 1) qo'shni tomonlari ayirmasi 1 sm ga teng; 2) qo'shni tomonlarining nisbati 2 ga teng;

3) parallelogramm perimetri 1,2 m bo'lgan ikkita teng yonli uchburchaklardan tashkil topgan bo'lsa, parallelogramm tomonlari nimaga teng?

517. $ABCD$ parallelogramm A burchagining bissektrisasi BC tomonni P nuqtada kesadi va shu bilan birga $BP = PC$. Agar parallelogrammning perimetri 42 sm ga teng bo'lsa, uning tomonlarini toping.

518. Ikkitta $ABCD$ va $ANCP$ parallelogrammni yasang. Isbot qiling: 1) AC, BD va NP kesmalar bir nuqtada kesishishini;

2) $BNOP$ to'rtburchak — parallelogramm ekanligini.

519. Agar to'rtburchakning ikki juft teng tomonlari bo'lsa, bu to'rtburchak har doim ham parallelogramm bo'ladimi?

520. Parallelogramm burchaklaridan birining bissektrisasi o'zi kesib o'tadigan tomonni 7 sm va 9 sm li kesmalarga bo'ladi. Shu parallelogrammning perimetrini toping.

521. 1) To'g'ri to'rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan uning tomonlariga o'tkazilgan perpendikularlar mos ravishda 5 sm va 7 sm ga teng. Bu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

2) $ABCD$ romb berilgan. AC va BD diagonallar mos ravishda 20 sm va 12 sm ga teng. AO va BO kesmalarning uzunligini toping.

522. To'g'ri to'rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan uning tomonlariga o'tkazilgan perpendikularlar mos ravishda 4 sm va 6 sm ga teng. Bu to'g'ri to'rtburchakning perimetrini va yuzini toping.

523. 1) $ABCD$ parallelogrammda $\angle A = 75°$. Parallelogrammning qolgan burchaklari nimaga teng?

2) Parallelogrammning ikkita qarama-qarshi burchaklarining yig'indisi 220° ga teng. Bu parallelogrammning burchaklari nimaga teng?

524. Agar $ABCD$ rombda $\angle B = 100^\circ$, $AB = 15$ sm bo‘lsa, uning perimetrini toping.

525. To‘g‘ri to‘rtburchak diagonallarining kesishish nuqtasidan uning tomonlariga o‘tkazilgan perpendikularlar mos ravishda 4 sm va 11 sm ga teng. Bu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini toping.

526. $ABCD$ romb berilgan. AC va BD diagonallar mos ravishda 30 sm va 12 sm ga teng. Rombning yuzini toping.

527. 1) $ABCD$ teng yonli trapetsiyada $BC = 20$ sm, $AB = 24$ sm va $\angle D = 60^\circ$ bo‘lsa, uning AD asosini toping.

2) Teng yonli trapetsiyaning burchaklaridan biri 125° ga teng. Trapetsiyaning qolgan burchaklarini toping.

528. Trapetsiyaning ketma-ket olingan burchaklarining nisbati quyidagicha bo‘lishi mumkinmi: 1) $6:3:4:2$; 2) $8:7:13:12$?

529. To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning asoslari a va b ga, burchaklaridan biri esa α ga teng. Agar: 1) $a = 7$ sm, $b = 4$ sm, $\alpha = 60^\circ$ bo‘lsa, katta yon tomonni toping; 2) $a = 15$ sm, $b = 10$ sm, $\alpha = 45^\circ$ bo‘lsa, kichik yon tomonni toping.

530. Parallelogrammning yuzi 40 sm^2 ga, tomonlari esa 10 sm va 8 sm ga teng. Shu parallelogrammning ikkala balandligini toping.

531. $ABCD$ rombning diagonallari 15 sm ga va 36 sm ga teng. AC diagonalida P nuqta shunday olinganki, unda $AP : PC = 4:1$ nisbatda. APD uchburchakning yuzini toping.

532. Teng yonli to‘g‘ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi 20 sm ga teng. Shu uchburchakning yuzini toping.

533. Teng yonli trapetsiyaning perimetri 32 sm ga, yon tomoni 5 sm ga, yuzi esa 44 sm^2 ga teng. Trapetsiyaning balandligini toping.

534. To‘g‘ri burchakli trapetsiyaning yuzi 120 sm^2 ga, perimetri 56 sm ga, kichik yon tomoni esa 6 sm ga teng. Katta yon tomonini toping.

535. $ABCD$ to‘g‘ri to‘rtburchak C uchining bissektrisasi AD tomonni P nuqtada kesadi. Agar $AP = 10$ sm, $PD = 14$ sm ga teng bo‘lsa, shu to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzini toping.

536. To‘g‘ri to‘rtburchak bilan parallelogramm bir asosga va bir xil perimetrga ega. Shu parallelogramm bilan to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzlarini taqqoslang.

537. Uchburchakning tomonlari 21, 72 va 75 ga teng. Shu uchburchakning yuzini toping.

538. $\triangle ABC$ da AE va BD — balandliklar. $AC = 20$ sm, $BD = 16$ sm va $BC = 32$ ga teng. AE ni toping.

539. Uchburchaklarning asoslari teng, uchburchaklardan birining balandligi ikkinchisidan to'rt marta katta. Shu uchburchaklar yuzlarining nisbatini toping.

540. Teng yonli trapetsiyaning diagonali 50 sm ga, balandligi esa 30 sm ga teng. Shu trapetsiyaning yuzini toping.

541. Aylanaga ichki chizilgan BAC burchak 45° ga teng, u BC yoyga tiraladi. BOC burchakni toping, bunda O — aylana markazi.

542. To'g'ri burchakli ABC uchburchakda ($\angle C = 90°$) $\angle A = 30°$, $AC = 2\sqrt{3}$. Markazi A nuqtada va radiusi 2,2 ga teng bo'lgan aylana o'tkazilgan. Shu aylana BC tomon bilan nechta umumiy nuqtaga ega?

543. Aylanada yotgan P nuqtadan AB diametrga PQ perpendikular tushirilgan. $AQ = 4$ va $QB = 9$ bo'lsa, PQ kesma uzunligini toping.

544. Biror $ABCD$ parallelogrammni chizing. Vektorlarni yasang:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; 5) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; 7) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$.

2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; 6) $\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}$; 8) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

545. Quyidagi vektorlar kollinearmi: 1) $\vec{a}(-2;\ 1)$ va $\vec{b}(4;\ -2)$; 2) $\vec{a}(1;\ -3)$ va $\vec{b}(1;\ 3)$; 3) $\vec{a}(3;\ -2)$ va $\vec{b}(-3;\ 2)$; 4) $\vec{a}(0;\ -1)$ va $\vec{b}(1;\ 0)$?

546. Vektorlar yig'indisini toping: $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{TP} + \overrightarrow{MT} + \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{PQ}$.

547. $\overrightarrow{FK}$ vektorni $\overrightarrow{EF}$ va $\overrightarrow{EK}$ vektorlar orqali ifodalang.

548. $A(-1,\ 2)$, $B(-4,\ -2)$, $C(-1,\ 3)$, $D(-4,\ -2)$ bo'lsin. Hisoblang:

1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; 3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$; 4) $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DB}$.

549. $ABCD$ — parallelogramm. $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{DC}$ vektorlar tengligini isbotlang.

550. P va T nuqtalar $ABCD$ parallelogrammning BC va BD tomonlarining o'rtalari. $\overrightarrow{BC}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlarni $\overrightarrow{AP}$ va $\overrightarrow{AT}$ vektorlar orqali ifodalang.

551. Har qanday to'rtburchakning o'rta chiziqlari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linisini isbotlang.

552. 1) Qavariq ko'pburchakning diagonallari uning tomonlaridan 12 ta ko'p. Shu ko'pburchakning tomonlari nechta?

2) Qavariq n burchakning diagonallari soni 25 tadan kam emas va 30 tadan ko'p emas. n nechaga teng bo'lishi mumkin?

8- TEST

1. To‘g‘ri burchakli uchburchakning katetlari 6 va 8 ga teng. Uning gipotenuzasiga tushirilgan balandligini toping.

   A) 4,8; B) 5; C) 4,5; D) 4,7.

2. To‘rtburchakning burchaklari o‘zaro 3 : 5 : 4 : 6 nisbatda. To‘rtburchakning kichik burchagini toping.

   A) 80°; B) 30°; C) 60°; D) 40°.

3. Qavariq to‘rtburchakning diagonallari uni nechta uchburchakka ajratadi?

   A) 4; B) 5; C) 6; D) 8.

4. To‘g‘ri to‘rtburchakning eni 5 ga teng, bo‘yi undan 7 ga ortiq. To‘g‘ri to‘rtburchakning perimetrini hisoblang.

   A) 32; B) 34; C) 24; D) 26.

5. Har bir ichki burchagi 156° bo‘lgan qavariq ko‘pburchakning nechta tomoni bor?

   A) 10; B) 15; C) 6; D) 12.

6. To‘g‘ri to‘rtburchakning bo‘yi 20% va eni 10% orttirilsa, uning yuzi necha protsent ortadi?

   A) 20%; B) 35%; C) 27%; D) 32%.

7. Rombning yuzi 24 ga, diagonallaridan biri 6 ga teng. Uning tomonini toping.

   A) 10; B) 5; C) 8; D) 4,8.

8. Rombning balandligi 5 ga, diagonallarining ko‘paytmasi 80 ga teng. Uning perimetrini toping.

   A) 32; B) 16; C) 24; D) 28.

9. $\vec{a}(2;\ -3)$ va $\vec{b}\,(-2;\ -3)$ vektor berilgan. $\vec{m} = -\vec{a} + 2\vec{b}$ vektorning koordinatalarini toping.

   A) $(-6; -3)$; B) $(-3; 6)$; C) $(-2; -9)$; D) $(2; -3)$.

10. $\vec{a}(3;\ 2)$ va $\vec{b}\,(0;\ -1)$ vektor berilgan. $2\vec{a} - 4\vec{b}$ vektorning modulini toping.

    A) 10; B) 6; C) 8; D) 3.

11. $\vec{a}(5;\ 1)$ va $\vec{b}\,(-2;\ 3)$ vektor berilgan. $|\vec{a} + \vec{b}\,|$ ni hisoblang.

    A) 5; B) 3; C) 4; D) 2.

JAVOBLAR

3. 1) Teng: $n = p$; 2) yo'q, noto'g'ri. **5.** 1) 3 ta; 2) 4 ta. **7.** 3) 8. **9.** 46 mm, 40 mm, 38 mm, 36 mm. **11.** 3 sm. **13.** 1) 3 ta; 2) 9 ta. **14.** 18 sm. **16.** 36°, 72°, 108°, 144°. **18.** 1) $n = 8$; 3) $n = 24$. **19.** 1) $n = 10$; 4) $n = 40$. Ko'rsatma. Ichki burchaklari teng bo'lgan n burchakning har bir burchagi $180°(n - 2) : n$ ga teng. **20.** 2) $n = 15$. Ko'rsatma. Tashqi burchaklar teng bo'lgan n burchakning har bir burchagi $360° : n$ ga teng. **21.** $n = 14$. **22.** 1) $n \geq 5$ da o'tmas burchak; 2) $n = 4$ da to'g'ri burchak (to'g'ri to'rtburchak, kvadrat); 3) $n = 3$ da o'tkir burchak (uchburchak) bo'lishi mumkin. **23.** $n = 7$. **29.** 80°; 100°; 130°. **30.** 70°, 81°. **31.** 1) 20 sm; 2) 50°. **34.** 23 sm. **35.** 108°; 94°. **36.** 48 sm. **39.** 33,5 sm, 9,5 sm. **40.** 132 sm. **44.** 60°, 120°, 120°, 60°. **45.** 65°, 115°, 115°, 65°. **52.** 1) 25°, 155°, 25°, 155°; 3) 60°, 120°, 60°, 120°. **55.** $\angle A = \angle C = 30°$, $\angle B = \angle D = 150°$. **57.** 90°, 90°, 90°, 90°. **65.** $AC = 64$ sm. **67.** 72 sm. **69.** 12 sm. **75.** 100 sm. **76.** 1) Ikkita teng tomonli uchburchakdan; 2) to'rtta teng to'g'ri burchakli uchburchakdan romb yasash mumkin. **82.** $\angle A = \angle C = 40°$, $\angle B = \angle D = 140°$. **83.** 64 sm. **86.** 1) 10 sm. **87.** 2) 57 sm. **90.** 18 dm 4 sm. **92.** 44 sm. **93.** 55°, 125°, 55°. **94.** 4 sm, 2 sm. **97.** $\angle C = 45°$, $\angle D = 135°$. **102.** 1) $AC : BD = 0{,}5$; $BD : AC = 2$; 2) o'zgarmaydi. **104.** 2) 6,25 sm. **105.** 1) Ha, chunki $1{,}6 \cdot 1{,}8 = 0{,}6 \cdot 4{,}8$; 2) yo'q, chunki $\frac{5}{6} \neq \frac{10}{9{,}5}$. **108.** 1) 20 sm, 15 sm. **113.** $OB_1 = 3{,}2$ sm, $OB_2 = 4{,}8$ sm, $OB_3 = 6{,}4$ sm. **114.** $CD = 3{,}75$ m. **120.** $BE = 12$ sm. **123.** $0{,}5p$. **124.** $P_{DEF} = 60$ sm, $DE = 25$ sm, $EF = 15$ sm, $DF = 20$ sm. **125.** $m + n$; 16 dm. **126.** 2) $A_1B_1 = 60$ sm, $B_1C_1 = 24$ sm, $A_1C_1 = 48$ sm. **127.** 6 sm. **129.** 28 sm. **131.** 1) 14 sm. **132.** 20 sm. **133.** 1) 14 sm. **137.** $AE = 2$ sm, $EF = 8$ sm, $FD = 2{,}5$ sm, $AD = 10$ sm. **138.** 30 sm, 10 sm. **139.** 4 sm; 10 sm. **144.** 9 sm. **147.** 15 sm dan. **155.** 42 sm, 38 sm, 34 sm. **156.** 5 dm. **157.** 16 sm. **163.** $A_1(a; -b)$ va $A_2(-a; b)$. **171.** $ABCD$ kvadrat AC o'qqa nisbatan simmetriyada o'ziga-o'zi o'tadi. **172.** $A_1(-4; -4)$ va $A_2(4; 4)$. **174.** 1) 2 ta, rombning diagonallari; 2) 4 ta, o'rta perpendikular va kvadrat diagonallari yotgan to'g'ri chiziq; 4) 1 ta, asosiga o'tkazilgan medianasi yotgan to'g'ri chiziq, teng yonli ucburchakning simmetriya o'qi bo'ladi. **175.** 1) 12 sm. **180.** 1) 6 sm va 14 sm; 2) 5 sm va 10 sm; 3) 24 sm, 21 sm va 21 sm yoki 21 sm, 24 sm va 24 sm. **184.** $P_{EBCF} = 55$ sm, $P_{ABCD} = 70$ sm. **185.** $AB = BC = 16{,}5$ sm; $AC = 13$ sm. **190.** Ko'rsatma. Koordinatalar boshiga nisbatan simmetriyada nuqtaning koordinatalari ishorasini qarama-qarshiga o'zgartiradi. **193.** 4) Ko'rsatma. Koordinatalar burchaklari bissektrisasiga nisbatan simmetriyada nuqta koordinatalari o'z o'rinlarini almashtiradi. **196.** 1) 6 raqami 9 raqamiga o'tadi. **199.** 1) A va C; 2) A va E; 3) B va D. **207.** 1) Ox o'qiga nisbatan simmetriyada: $A(2; -2)$, $B(-2; 0)$, $C(3; -4)$, $D(0; -2)$, $E(-2; 2)$, $F(-4; -2)$, $K(3; 2)$, $L(-3; 3)$; Oy o'qiga nisbatan simmetriyada: $A(-2; 2)$, $B(2; 0)$, $C(-3; 4)$, $D(0; 2)$, $E(2; -2)$, $F(4; 2)$, $K(-3; -2)$, $L(3; -3)$; 2) $A(-2; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-3; -4)$, $D(0; -2)$, $E(2; 2)$, $F(4; -2)$, $K(-3; 2)$, $L(3; 3)$. **219.** 1) A va D. **226.** 2 ta, ulardan teng yonli uchburchak va parallelogramm yasash mumkin. **228.** 1) Yo'q; 2) ha. **236.** 1) 4 marta ortadi. **238.** 1) n^2 marta ortadi. **241.** Tomoni $a_1 = 2a$ bo'lgan kvadrat. **246.** 6 sm. **249.** 60 sm². **250.** $S_{ABP} = Q$. **252.** 24 dm. **255.** $h = 4$ sm. **257.** 1 : 4 kabi. **261.** a) $S_{ABC} = 4{,}5$ kv. birlik; b) $S_{ABC} = 3$ kv. birlik. **264.** 54 sm². **265.** 5 sm. **266.** 24 sm². **271.** 1) 104 sm²; 2) $0{,}5ab$. **274.** 4 sm. **278.** 280 sm². **282.** $S_{ABCDE} = 0{,}5(AB + FC)AE = (a + b)c$. **284.** a) $1 - 0{,}5x$ kv. birlik; b) 0,5 kv. birlik. **288.** 1) 20,4 km. **294.** 8 dm². **302.** a) $x = 2$; b) $x = \sqrt{2}$; d) $x = \sqrt{3}$. **303.** 50 sm². **311.** 162 sm². **312.** 1) $AD = 36$; 2) $BC = 6$. **320.** 1) $\frac{12}{7}\sqrt{6}$ sm. **322.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$. **324.** $2{,}5\sqrt{7}$ sm. **328.** 480 sm². **331.** 1) 756; 4) 216. **334.** 114 sm². **336.** 2250 sm². **337.** 17 sm. **340.** 384 sm².

342. 60 sm; 14,4 sm. **345.** 2) Aylananing perpendikular diametrlarini o'tkazish yetarli. **348.** 1) 200°; 160°; 2) 80°; 280°. **349.** $\angle AOC = 35°$. **356.** 6 sm. **357.** 10 sm. **365.** $R_1 = 0{,}5(R_1 - R_2)$ bo'lgan aylana. **366.** 1) 12 sm, 20 sm. **373.** AB va BD kesuvchi. **377.** 1) $R = AC = 5$ sm, demak, AC – urinma; 2) $R < 5$ sm da; 3) $R > 5$ da. **381.** AB urinma. **382.** 60°. **384.** 100°. **386.** 20°. **388.** $AC = 10$ sm. **391.** 1) 100°, 80°. **393.** 36°, 72°, 108°, 72°, 36°. **398.** Ko'rsatma. 397- masala natijasidan foydalaning. **400.** Ko'rsatma. Dastlab gipotenuza uzunligini toping, so'ngra 399- masaladagi formuladan foydalaning. **402.** 2) 5 sm. **403.** 1) 36 sm; 4 sm. **408.** 1) 6 sm; 3) 16 mm. **409.** 4 sm. **411.** To'g'ri burchakli uchburchak. **414.** 1) 10 sm. **416.** 30° yoki 150°. **419.** 1) 18°. **423.** 62°. **424.** 1) 110°, 30°, 40°. **426.** 1) 40°, 40°, 100°. **428.** 132°. **435.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$. 1) AC to'g'ri chiziqda faqat $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{CA}$ vektorlar yotadi; 2) CD to'g'ri chiziqda faqat $\overrightarrow{CD}$ va $\overrightarrow{DC}$ vektorlar yotadi. **436.** $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$. 1) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$ vektorlar $\overrightarrow{AB}$ vektor bilan kollinear; 2) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$ vektorlar $\overrightarrow{BC}$ vektor bilan kollinear; 3) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{DO}$ vektorlar $\overrightarrow{BO}$ vektor bilan kollinear. **439.** 1) Ma'noga ega emas, chunki vektorlarni faqat modullari bo'yicha solishtiriladi; 2) tengsizlik to'g'ri; 3) $\overrightarrow{AC}$ va $\overrightarrow{BD}$ vektorlar kollinear emas, shuning uchun tenglik ma'noga ega emas; 4) tenglik o'rinli, chunki to'g'ri to'rtburchakning diagonallari o'zaro teng. **440.** 1) Romb; 2) trapetsiya. **458.** 1) $k > 0$ da $\vec{a} \uparrow\uparrow k\vec{a}$; 2) $k < 0$ da $\vec{a} \uparrow\downarrow k\vec{a}$; 3) $k = 1$ da $\vec{a} = k\vec{a}$. **460.** $\overrightarrow{OA} = -0{,}5\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$; $\overrightarrow{AK} = \vec{b} + 0{,}5\vec{a}$. **465.** 1) $\vec{0}$; 2) $\vec{0}$. **467.** 1) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB} = -4\overrightarrow{CA}$; 3) $\overrightarrow{CB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$. **474.** $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\cdot\vec{b}$. **476.** $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$. **478.** 1) (4; −5); 3) (0; −7); 4) (−3; 0). **479.** 1) (2; −3). **480.** 1) $\overrightarrow{AB} = (8;\ -4)$, $\overrightarrow{BA} = (-8;\ 4)$. **481.** 1) $D\,(0;\ 4)$; 2) $D\,(-2;\ 2)$. **482.** $B\,(-2;\ -11)$. **483.** $\overrightarrow{AC} = (-2;\ 2)$, $\overrightarrow{DB} = (-3;\ -6)$, $\overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{DB}$. **484.** 1) (1; −2); 2) (2m; 2n). **489.** 1) (6; 3); 2) (−6; 3). **491.** 1) (0; 6); 2) (−5; 8). **492.** 1) (4; −8); 2) (−2;−1). **494.** 1) −13; 4) −34. **495.** 1) 13. **496.** 1) 14. **497.** 1) $x = \pm 3$. **498.** 2) −1; 4) 0. **499.** 11. **500.** 5. **506.** $A(6;\ -1)$. **507.** $B(-5;\ 11)$. **508.** 2) (−2; 2). **509.** (0; −1). **510.** (5; 12). **511.** 1) (−5; −7). **512.** 1) −2; 2) 5. **514.** 1) (1; −1); 4) (−2p; −2q). **516.** 3) 0,5 m dan. **520.** 46 sm. **522.** 40 sm; 96 sm^2. **524.** 60 sm. **525.** 176 sm^2. **526.** 180 sm^2. **527.** 1) 44 sm; 2) 55°, 125°, 55°. **528.** 1) Yo'q; 2) ha. **529.** 1) 6 sm; 2) 5 sm. **530.** 4 sm, 5 sm. **531.** 108 sm^2. **532.** 100 sm^2. **533.** 4 sm. **534.** 10 sm. **535.** 336 sm^2. **537.** 756 kv. birlik. **538.** 10 sm. **539.** 4 : 1. **540.** 1200 sm^2. **541.** 90°. **543.** 6. **545.** 1) Kollinear, chunki $\vec{b} = -2\vec{a}$; 2) kollinear emas, chunki $\vec{a} \neq \vec{b}$; 3) kollinear, chunki $\vec{a} = -\vec{b}$; 4) kollinear emas, chunki $\vec{a} \neq \vec{b}$. **546.** $\overrightarrow{BQ}$. **548.** 1) 29; 2) 0; 3) −29; 4) 0. **552.** 1) 8 ta; 2) 9 ta.

MUNDARIJA

ABDUVAHOB ABDURAHMONOVICH RAHIMQORIYEV

GEOMETRIYA

Umumiy o‘rta ta’lim maktablarining 8- sinfi uchun darslik

Muharrir	**M. Sa’dullayev**
Maxsus muharrir	**L. Ten**
Badiiy muharrir	**T. Qanoatov**
Texnik muharrir	**J. Bekiyeva, U. Kim**
Musahhiha	**E. Nurmatova**
Sahifalovchi va rassom	**Sh. Rahimqoriyev**

Bosishga ruxsat etildi 01.04.2010. Bichimi $70x90^1/_{16}$.
Kegli 10,5. TimesUz garniturasi. Ofset bosma usulda bosildi.
Shartli b. t. 11,7. Nashr b.t. 10. Jami nusxasi 453 541.
Buyurtma № 58.

Shartnoma № 34.

Darslikning original maketi «Mitti Yulduz» MChJ da tayyorlandi.
Toshkent shahri, Navoiy ko‘chasi, 30- uy.

«Yangiyo‘l poligraph service» MCHJ bosmaxonasida bosildi.
Yangiyo‘l shahri, Samarqand ko‘chasi, 44- uy.

Ijaraga berilgan darslik holatini ko'rsatuvchi jadval

№	O'quvchining ismi, familiyasi	O'quv yili	Darslikning olingandagi holati	Sinf rahbarining imzosi	Darslikning topshirilgandagi holati	Sinf rahbarining imzosi
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Darslik ijaraga berilib, o'quv yili yakunida qaytarib olinganda yuqoridagi jadval sinf rahbari tomonidan quyidagi baholash mezonlariga asosan to'ldiriladi:

Yangi	Darslikning birinchi marotaba foydalanishga berilgandagi holati
Yaxshi	Muqova butun, darslikning asosiy qismidan ajralmagan. Barcha varaqlari mavjud, yirtilmagan, ko'chmagan, betlarida yozuv va chiziqlar yo'q
Qoniqarli	Muqova ezilgan, birmuncha chizilib chetlari yedirilgan, darslikning asosiy qismidan ajralish holati bor, foydalanuvchi tomonidan qoniqarli ta'mirlangan. Ko'chgan varaqlari qayta ta'mirlangan, ayrim betlariga chizilgan
Qoniqarsiz	Muqovaga chizilgan, yirtilgan, asosiy qismidan ajralgan yoki butunlay yo'q, qoniqarsiz ta'mirlangan. Betlari yirtilgan, varaqlari yetishmaydi, chizib, bo'yab tashlangan. Darslikni tiklab bo'lmaydi

5000

Sotuvga chiqarish taqiqlanadi

RMKJ

To'rtburchaklar

Fales teoremasi va uning natijalari

Simmetriya

Yuzlar

Pifagor teoremasi

Aylana

Vektorlar

POLIGRAPH SERVICE

ISBN 978-9943-361-33-1

9 789943 361331