GEOMETRIYA

10

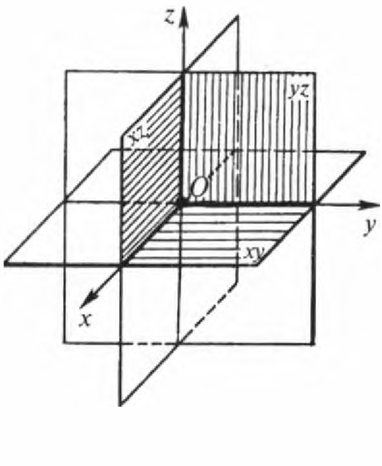
A. V. POGORELOV

GEOMETRIYA

Umumta'lim maktablarining 10- sinfi uchun darslik

O'zbekiston Respublikasi Xalq ta'limi vazirligi tasdiqlagan

3- nashri



„O'QITUVCHI" NASHRIYOT-MATBAA IJODIY UYI
TOSHKENT—2005

22.151
P.57

A.V. Pogorelov

Geometriya: Umumta'lim maktablarining 10- sinfi uchun darslik. 3- nashri — T., „O'qituvchi"NMIU, 2005. —112 b.

BBK. 22.151 ya 721

P $\frac{4306020502-81}{353(04)-2005}$ **Buyurt. var.—2005.**

ISBN 5—645—04368—5

„O'qituvchi" NMIU, T.,2005.

SO‘ZBOSHI

Ushbu darslik A.V.Pogorelovning umumta'lim maktablarining 7—11- sinflari uchun «Geometriya» darsligi asosida yozildi. Unda Xalq ta'limi vazirligi 2003- yilda tasdiqlagan o‘tish davriga mo‘ljallab tuzilgan yangi dasturga mos 10- sinf materiali keltirilgan.

Darslik ikki bo‘limdan iborat bo‘lib, ikkinchi bo‘lim asosiy bo‘lim hisoblanadi. Bu bo‘limda stereometriyaning «Stereometriya aksiomalari va ularning eng sodda natijalari», «To‘g‘ri chiziqlar va tekisliklarning parallelligi», «To‘g‘ri chiziqlar va tekisliklarning perpendikularligi», «Fazoda Dekart koordinatalari va vektorlar» mavzulari to‘liq bayon etilgan.

Har qaysi mavzuni o‘rganishda unga oid masalalar yechib ko‘rsatilgan. Mavzular so‘ngida «Tekshirish uchun savollar» va yechish uchun «Masalalar» berilgan.

Bu mavzularni o‘rganishga kirishishdan oldin esa birinchi bo‘limda planimetrianing qator, stereometriyaning yuqoridagi mavzulariga mos mavzulari qisqacha takrorlangan, qisqacha nazariy ma'lumotlar, tushuncha va ta'riflar bayon etilgan, teoremalar isbotsiz keltirilgan, planimetriya aksiomalari sanab o‘tilgan. Bo‘lim so‘ngida esa yechish uchun masalalar berilgan.

Darslikning oxirida berilgan «10- sinf geometriya kursini takrorlash uchun masalalar»ni yechishda butun 10- sinf geometriya kursiga oid nazariy bilimlar qayta takrorlanishi va mustahkamlanishi ko‘zda tutilgan.

PLANIMETRIYA MAVZULARINI TAKRORLASH

1- §. ENG SODDA GEOMETRIK SHAKLLARNING ASOSIY XOSSALARI. UCHBURCHAK

Nuqta va to‘g‘ri chiziq. *Nuqta* va *to‘g‘ri chiziq* tekislikdagi asosiy geometrik shakllar hisoblanadi. Nuqtalarni lotin alifbosining bosh harflari A, B, C, D, ... bilan belgilash qabul qilingan. To‘g‘ri chiziqlar lotin alifbosining kichik harflari a, b, c, d, ... bilan belgilanadi.

Quyidagi xossalarni tekislikda nuqtalar va to‘g‘ri chiziqlar tegishliligining *asosiy xossalari* deb ataymiz:

I. ***To‘g‘ri chiziqni har qanday olmaylik, shu to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgan nuqtalar ham, tegishli bo‘lmagan nuqtalar ham mavjud.***

Har qanday ikki nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va faqat bitta.

Kesma. To‘g‘ri chiziqning berilgan ikki nuqtasi orasida yotgan hamma nuqtalaridan iborat qismi *kesma* deyiladi. Berilgan bu ikki nuqta *kesmaning oxirlari* deyiladi. Kesma o‘z oxirlarini ko‘rsatish bilan belgilanadi. *«AB kesma»* deyilganda yoki yozilganda oxirlari A va B nuqtalardan iborat kesma tushuniladi.

Nuqtalarning to‘g‘ri chiziqda joylashuvlarining *asosiy xossasi* deb quyidagi xossaga aytamiz:

II. ***To‘g‘ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi.***

Kesmalarni o‘lchash uchun turli o‘lchash asboblaridan foydalaniladi. Bo‘linish nuqtalariga ega chizg‘ich bunday asboblarning eng soddasidir.

Quyidagi xossalarni biz kesmalarni o‘lchashning *asosiy xossalari* deymiz:

III. ***Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Kesma uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan qismlari uzunliklarining yig'indisiga teng.***

Yarim tekisliklar. Ixtiyoriy *a* to'g'ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka *ajratadi*. Bunday ajratish ushbu xossaga ega. Agar biror kesmaning oxirlari bitta yarim tekislikka tegishli bo'lsa, u holda kesma to'g'ri chiziq bilan kesishmaydi. Agar kesmaning oxirlari turli yarim tekisliklarga tegishli bo'lsa, u holda kesma to'g'ri chiziq bilan kesishadi.

Quyidagi xossani nuqtalarning tekislikdagi to'g'ri chiziqqa nisbatan joylashuvlarining *asosiy xossasi* deymiz.

IV. ***To'g'ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi.***

Yarim to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziqning berilgan nuqtasidan bir tomonda yotuvchi hamma nuqtalaridan iborat qismi *yarim to'g'ri chiziq* yoki *nur* deyiladi. Berilgan nuqta yarim to'g'ri chiziqning *boshlang'ich nuqtasi* deyiladi. Bitta to'g'ri chiziqning umumiy boshlang'ich nuqtaga ega bo'lgan har xil yarim to'g'ri chiziqlari *to'ldiruvchi chiziqlar* deyiladi.

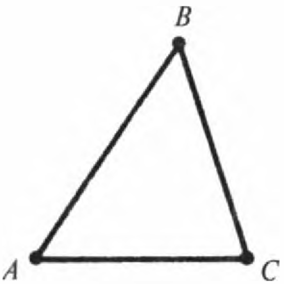
Yarim to'g'ri chiziqlar ham to'g'ri chiziqlar kabi lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi. Yarim to'g'ri chiziqni ikkita nuqta, ya'ni boshlang'ich nuqta va yarim to'g'ri chiziqqa tegishli biror nuqta bilan belgilash mumkin. Bunda boshlang'ich nuqta birinchi o'ringa qo'yiladi.

Burchak. Umumiy boshlang'ich nuqtaga ega bo'lgan ikkita turli yarim to'g'ri chiziqdan iborat shakl *burchak* deyiladi. Bu boshlang'ich nuqta *burchakning uchi*, yarim to'g'ri chiziqlar esa *burchakning tomonlari* deyiladi.

Agar burchakning tomonlari bir to'g'ri chiziqning to'ldiruvchi yarim to'g'ri chiziqlari bo'lsa, burchak *yoyiq burchak* deyiladi.

Agar nur burchakning uchidan chiqib, oxirlari burchak tomonlarida yotuvchi kesma bilan kesishsa, bu nur shu burchak tomonlari *orasidan o'tadi* deymiz.

Quyidagi xossalarni biz burchaklarni o‘lchashning *asosiy xossalari* deymiz:



1- rasm.

V. ***Har bir burchak noldan katta tayin gradus o‘lchovga ega. Yoyiq burchak 180° ga teng. Burchakning gradus o‘lchovi o‘zining tomonlari orasidan o‘tuvchi har qanday nur yordamida ajratilishidan hosil qilingan burchaklarning gradus o‘lchovlari yig‘indisiga teng.***

Quyidagi xossalarni biz kesmalarni va burchaklarni qo‘yishning *asosiy xossalari* deymiz.

VI. ***Istalgan yarim to‘g‘ri chiziqqa uning boshlang‘ich nuqtasidan berilgan uzunlikda yagona kesma qo‘yish mumkin.***

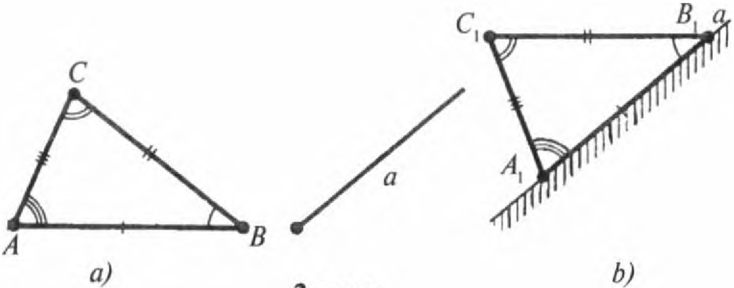
VII. ***Istalgan yarim to‘g‘ri chiziq hosil qilgan tayin yarim tekislikka berilgan gradus o‘lchovi 180° dan kichik yagona burchakni qo‘yish mumkin.***

Uchburchak. Bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan va shu nuqtalarni ikkitalab tutashtiruvchi uchta kesmadan iborat shakl *uchburchak* deyiladi. Nuqtalar uchburchakning uchlari, kesmalar esa uning *tomonlari* deyiladi.

1- rasmda siz uchlari A, B, C, tomonlari AB, BC, AC bo‘lgan uchburchakni ko‘rib turibsiz. Uchburchak uning uchlarini ko‘rsatish bilan belgilanadi. «Uchburchak» so‘zi o‘rniga ba’zan $\triangle$ belgidan foydalaniladi. Masalan, 1- rasmdagi uchburchak bunday belgilanadi: $\triangle ABC$.

ABC uchburchakning A uchidagi burchagi deb AB va AC yarim to‘g‘ri chiziqlar hosil qilgan burchakka aytiladi. Uchburchakning B va C uchlaridagi burchaklari ham shunga o‘xshash ta’riflanadi.

Agar uchburchaklarning mos tomonlari va mos burchaklari teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar *teng* uchburchaklar deyiladi. Bunda mos burchaklar mos tomonlar qarshisida yotishi kerak.



2- rasm.

Uchburchaklarning tengligini belgilash uchun odatdagi tenglik belgisi „ = “ dan foydalaniladi. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ko‘rinishdagi yozuv bunday o‘qiladi: «Uchburchak ABC teng uchburchak $A_1B_1C_1$ ga». Bunda uchburchakning uchlari yozilgan tartib ahamiyatga ega. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ tenglik $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, ... ekanini bildiradi.

ABC uchburchak va a nur berilgan bo‘lsin (2- a rasm). ABC uchburchakni shunday joylashtiramizki, uning A uchi a nurning boshi bilan ustma-ust tushsin, B uchi a nurda, C uch esa a nur va uning davomiga nisbatan berilgan yarim tekislikda yotsin. Uchburchakning bu yangi holatdagi uchlarini A_1, B_1, C_1 bilan belgilaymiz (2- b rasm).

$A_1B_1C_1$ uchburchak ABC uchburchakka teng.

ABC uchburchakka teng $A_1B_1C_1$ uchburchakning mavjudligini va berilgan a nurga nisbatan ko‘rsatilgan tarzda joylashganligini eng sodda shakllarning *asosiy xossalari* qatoriga kiritamiz. Bu xossani biz bunday ifodalaymiz:

VIII. ***Istalgan uchburchak uchun unga teng shunday uchburchak mavjudki, u berilgan yarim to‘g‘ri chiziqqa nisbatan berilgan holatda joylashadi.***

Parallel to‘g‘ri chiziqlar. Agar ikkita to‘g‘ri chiziq kesishmasa, ular *parallel* to‘g‘ri chiziqlar deyiladi.

To‘g ‘ri chiziqlarning parallelligini belgilash uchun || belgidan foydalaniladi. $a||b$ yozuv bunday o‘qiladi: «a to‘g‘ri chiziq b to‘g‘ri chiziqqa parallel».

Parallel to‘g‘ri chiziqlarning *asosiy xossasi* quyidagidan iborat.

IX. *Berilgan to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqta orqali tekislikda berilgan to'g'ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin emas.*

2- §. UCHBURCHAKLARNING TENGLIK ALOMATLARI

2.1- teorema (uchburchaklarning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi bo'yicha tenglik alomati). ***Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.***

2.2- teorema (uchburchaklarning bir tomoni va unga yopishgan burchaklari bo'yicha tenglik alomati). ***Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan burchaklari boshqa uchburchakning mos tomoni va unga yopishgan burchaklariga teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.***

Agar uchburchakning ikki tomoni teng bo'lsa, u *teng yonli uchburchak* deyiladi. Bu teng tomonlar uchburchakning yon tomonlari, uchinchi tomoni esa *uchburchakning asosi* deyiladi.

2.3- teorema (teng yonli uchburchak burchaklarining xossasi). ***Teng yonli uchburchakning asosidagi burchaklari teng.***

2.4- teorema (teng yonli uchburchak alomati). ***Uchburchakning ikkita burchagi teng bo'lsa, bu uchburchak teng yonli bo'ladi.***

Hamma tomonlari teng uchburchak *teng tomonli uchburchak* deb ataladi.

Uchburchakning balandligi, bissektrisasi va medianasi. Uchburchakning berilgan uchidan tushirilgan *balandligi* deb uchburchakning shu uchidan uning qarshisidagi tomoni yotgan to'g'ri chiziqqa tushirilgan perpendikularga aytiladi.

Uchburchakning berilgan uchidan o'tkazilgan *bissektrisasi* deb uchburchak burchagi bissektrisasining shu uchni uning qarshi tomondagi nuqta bilan tutashtiruvchi kesmasiga aytiladi.

Uchburchakning berilgan uchidan tushirilgan *medianasi* uchburchakning shu uchini uning qarshisidagi tomon o'rtasi bilan tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

2.5- teorema (teng yonli uchburchak medianasining xossasi). ***Teng yonli uchburchakning asosiga o'tkazilgan medianasi ham balandlik, ham bissektrisadir.***

2.6- teorema (uchburchaklarning uchta tomonlariga ko'ra tenglik alomati). ***Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo'lsa, bunday uchburchaklar teng bo'ladi.***

3- §. TO'RTBURCHAKLAR

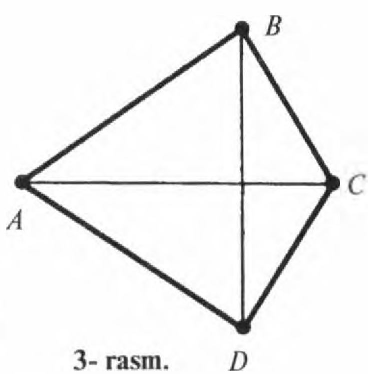
To'rtburchakning ta'rifi. To'rtta nuqta va bu nuqtalarni ketma-ket tutashtiruvchi to'rtta kesmadan iborat shakl *to'rtburchak* deyiladi. Bunda nuqtalardan hech qanday uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmasligi, ularni tutashtiruvchi kesmalar esa kesishmasligi kerak. Berilgan nuqtalar to'rtburchakning *uchlari,* ularni tutashtiruvchi kesmalar esa *tomonlari* deyiladi.

Agar to'rtburchakning uchlari uning tomonlaridan birining oxirlari bo'lsa, ular *qo'shni* uchlar deyiladi. Qo'shni bo'lmagan uchlar *qarama-qarshi yotuvchi* uchlar deyiladi. Qarama-qarshi uchlarni tutashtiruvchi kesmalar to'rtburchakning *diagonallari* deyiladi.

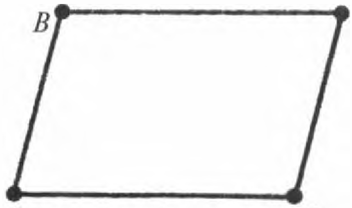
To'rtburchakning bir uchidan chiquvchi tomonlari *qo'shni tomonlar* deyiladi. Umumiy oxirga ega bo'lmagan tomonlar *qarama-qarshi tomonlar* deyiladi.

3- rasmdagi to'rtburchakda AB va CD, BC va AD tomonlar qarama-qarshi tomonlardir.

To'rtburchak uchlarining ko'rsatilishi bilan belgilanadi. Masalan, 3- rasmdagi to'rtburchak bunday



3- rasm.



4- rasm.

5- rasm.

belgilanadi: $ABCD$. Belgilashda yonma-yon turgan uchlar qo'shni uchlar bo'lishi kerak. 3- rasmdagi to'rtburchakni $BCDA$ yoki $DCBA$ bilan belgilash ham mumkin. Ammo $ABDC$ deb belgilash mumkin emas (B va D — qo'shni bo'lmagan uchlar).

To'rtburchak barcha tomonlari uzunliklarining yig'indisi *perimetr* deb ataladi.

Parallelogramm. Qarama-qarshi tomonlari parallel bo'lgan, ya'ni parallel to'g'ri chiziqlarda yotadigan to'rtburchak *parallelogrammdir* (4- rasm).

3.1- teorema. ***Agar to'rtburchakning diagonallari kesishishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak parallelogrammdir.***

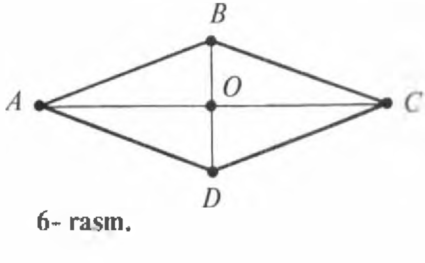
3.2- teorema (3.1- teoremaga teskari). ***Parallelogrammning diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.***

3.3- teorema. ***Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng, qarama-qarshi burchaklari teng.***

To'g'ri to'rtburchak. *To'g'ri to'rtburchak* hamma burchaklari to'g'ri bo'lgan parallelogrammdir (5- rasm).

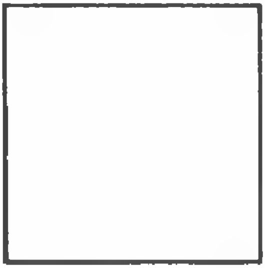
3.4- teorema. ***To'g'ri to'rtburchakning diagonallari teng.***

Romb. *Romb* hamma tomonlari teng bo'lgan parallelogrammdir (6- rasm).

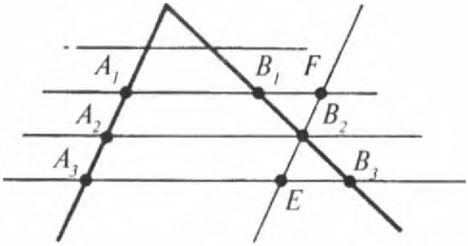


6- rasm.

3.5- teorema. ***Rombning diagonallari to'g'ri burchak ostida kesishadi. Romb diagonallari uning burchaklari bissektrisalaridir.***



7- rasm.



8- rasm.

Kvadrat. *Kvadrat* hamma tomonlari teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakdir (7- rasm).

Kvadratning hamma tomonlari teng, shuning uchun u rombdir. Shu sababli kvadrat to'g'ri to'rtburchak va rombning xossalariga ega:

1. ***Kvadratning barcha burchaklari to'g'ri burchaklar.***
2. ***Kvadratning diagonallari teng.***
3. ***Kvadratning diagonallari to'g'ri burchak ostida kesishadi va uning burchaklari bissektrisalari bo'ladi.***

3.6- teorema (Fales teoremasi). ***Agar burchak tomonini kesadigan parallel to'g'ri chiziqlar uning bir tomonidan teng kesmalar ajratsa, ikkinchi tomonidan ham teng kesmalar ajratadi*** (8- rasm).

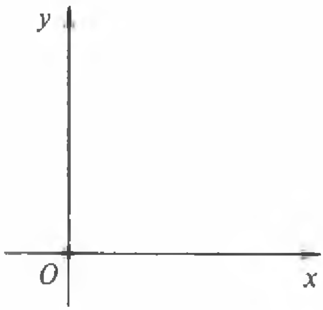
Trapetsiya. Ikkita qarama-qarshi tomonlarigina parallel bo'lgan to'rtburchak *trapetsiya* deb ataladi. Bu parallel tomonlar trapetsiyaning *asoslari* deyiladi. Boshqa ikki tomoni esa uning *yon tomonlari* deyiladi.

Yon tomonlari *teng* trapetsiya *teng yonli trapetsiya* deyiladi. Trapetsiya yon tomonlarining o'rtalarini tutashtiruvchi kesma *trapetsiyaning o'rta chizig'i* deyiladi.

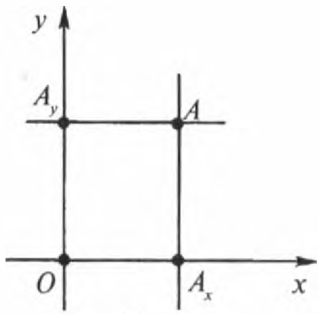
3.7- teorema. ***Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslariga parallel va ular yig'indisining yarmiga teng.***

4- §. TEKISLIKDA DEKART KOORDINATALARI

Tekislikda koordinatalarni kiritish. Tekislikda O nuqta orqali o'zaro perpendikular ikkita x va y to'g'ri chiziqlarni — *koordinatalar o'qlarini* o'tkazamiz (9- rasm). x o'qi (u odatda gorizontal bo'ladi) *abssissalar o'qi* deyiladi, y



9- rasm.



10- rasm.

o‘qi esa *ordinatalar o‘qi* deyiladi. Kesishish nuqtasi va *koordinatalar boshi* deb atalgan *O* nuqta o‘qlarning har birini ikkita yarim o‘qqa ajratadi. Ulardan birini *musbat* yarim o‘q deb, uni strelka bilan belgilaymiz, ikkinchisini *manfiy* yarim o‘q deb atashga kelishib olamiz.

Tekislikning har bir *A* nuqtasiga biz ikkita sonni — nuqta *koordinatalarini* — abssissa (x) va ordinata (y) ni quyidagi qoida bo‘yicha mos qilib qo‘yamiz.

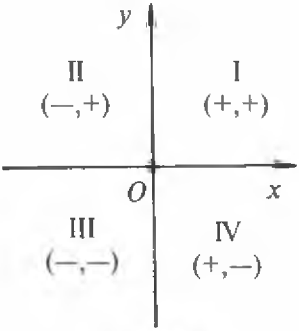
A nuqta orqali ordinatalar o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (10- rasm). U abssissalar o‘qi x ni biror A_x nuqtada kesib o‘tadi. *A* nuqtaning *abssissasi* deb biz absolut qiymati 0 nuqtadan A_x nuqtagacha bo‘lgan masofaga teng x sonini aytamiz. A_x nuqta musbat yarim o‘qqa tegishli bo‘lsa, bu son musbat, A_x manfiy yarim o‘qqa tegishli holda — manfiydir. *A* nuqta ordinatalar o‘qi y da yotsa, x ni nolga teng deb olamiz.

A nuqtaning ordinatasi (y) ham shunga o‘xshash ta’riflanadi.

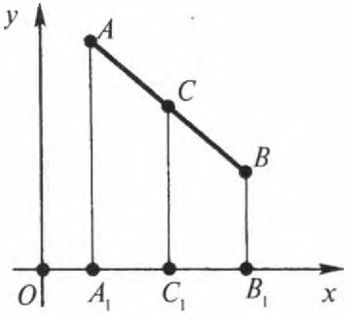
Nuqtaning koordinatalarini nuqtaning harfiy belgisi yoniga qavslar ichida yozamiz, masalan, $A(x; y)$ (birinchi o‘rinda abssissa, ikkinchi o‘rinda ordinata).

Koordinatalar o‘qlari tekislikni to‘rt qismga — choraklarga ajratadi: I, II, III, IV (11- rasm). Bir chorak ichida ikkala koordinataning ishoralari saqlanadi va rasmda ko‘rsatilgan qiymatlarga ega bo‘ladi.

x (abssissalar) o‘qi nuqtalari uchun ordinatalar nolga ($y = 0$), y (ordinatalar) o‘qi nuqtalari uchun abssissalar



11- rasm.



12- rasm.

nolga ($x = 0$) tengdir. Koordinatalar boshining ordinatasi ham, abssissasi ham nolga teng.

Yuqorida ko'rsatilgan usulda x va y koordinatalar kiritilgan tekislikni *xy tekislik* deb ataymiz. Bu tekislikda x va y koordinatalarga ega bo'lgan nuqtani ba'zan bevosita (x; y) bilan belgilaymiz. Tekislikda kiritilgan x, y koordinatalarni, ular ilk bor o'z tadqiqotlarida qo'llagan fransuz olimi R.Dekart nomi bilan Dekart koordinatalari deb ataladi.

Kesma o'rtasining koordinatalari. A (x_1; y_1) va B (x_2; y_2) — ikkita ixtiyoriy nuqta va C (x, y) nuqta AB kesmaning o'rtasi bo'lsin. C nuqtaning x va y koordinatalarini topamiz:

Oldin AB kesma y o'qiga parallel bo'lmagan, ya'ni $x_1 \neq x_2$ bo'lgan holni qaraymiz. A, B, C nuqtalar orqali y o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz (12- rasm). Bu to'g'ri chiziqlar x o'qini $A_1(x_1; 0)$, $B_1(x_2; 0)$, $C_1(x; 0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Fales teoremasiga ko'ra C_1 nuqta A_1B_1 kesmaning o'rtasi bo'ladi.

C_1 nuqta A_1B_1 kesmaning o'rtasi bo'lgani uchun $A_1C_1 = B_1C_1$, demak, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Bundan yo $x - x_1 = x - x_2$, yoki $x - x_1 = -(x - x_2)$. Birinchi tenglik o'rinli emas, chunki $x_1 \neq x_2$. Shu sababli ikkinchi tenglik o'rinli. Undan esa ushbu formulani topamiz:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$x_1 = x_2$, ya'ni AB kesma y o'qiga parallel bo'lsa, uchala nuqta: A_1, B_1, C_1 bir xil abssissaga ega bo'ladi. Demak, formula bu holda ham o'rinli bo'laveradi.

C nuqtaning ordinatasi ham shunga o'xshash topiladi, A, B, C nuqtalar orqali x o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkaziladi. Ushbu formula hosil bo'ladi:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

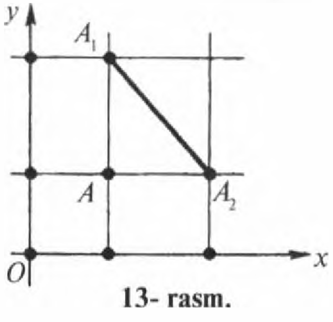
Nuqtalar orasidagi masofa. xy tekislikda ikkita nuqta berilgan bo'lsin: koordinatalari x_1, y_1 bo'lgan A_1 nuqta va koordinatalari x_2, y_2 bo'lgan A_2 nuqta. A_1 va A_2 nuqtalar orasidagi masofani ularning koordinatalari orqali ifodalaymiz.

Dastlab $x_1 \neq x_2$ va $y_1 \neq y_2$ bo'lgan holni ko'raylik. A_1 va A_2 nuqtalar orqali koordinata o'qlariga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz va ularning kesishish nuqtasini A bilan belgilaymiz (13- rasm). A va A_1 nuqtalar orasidagi masofa $|y_1 - y_2|$ ga teng, A va A_2 nuqtalar orasidagi masofa esa $|x_1 - x_2|$ ga teng. To'g'ri burchakli AA_1A_2 uchburchakka Pifagor teoremasini qo'llanib topamiz:

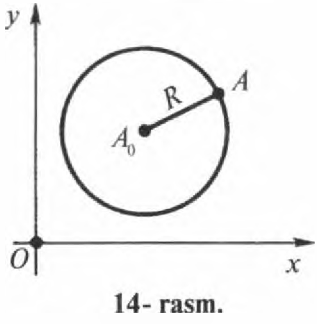
$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \qquad (1)$$

bunda d — A_1 va A_2 nuqtalar orasidagi masofa.

Nuqtalar orasidagi masofa formulasi (1) ni chiqarishda $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ deb faraz qilingan bo'lsa-da, u boshqa hollar uchun ham o'z kuchini saqlaydi. Haqiqatan ham, $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ bo'lsa, $d = |y_1 - y_2|$. (1) formula ham shu natijani beradi, $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ bo'lgan hol ham shunga



13- rasm.



14- rasm.

o‘xshash qaraladi, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ holda A_1 va A_2 nuqtalar ustma-ust tushadi va (1) formula $d = 0$ ni beradi.

Aylana tenglamasi. Tekislikda shaklning dekart koordinatalaridagi tenglamasi deb shaklga qarashli istalgan nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradigan ikkita x, y noma’lumli tenglamaga aytiladi. Aksincha, bu tenglamani qanoatlantiruvchi har qanday ikkita son shaklning biror nuqtasi koordinatalari bo‘ladi.

Markazi A_0 (a, b) nuqtada, radiusi esa R ga teng aylana tenglamasini tuzamiz (14- rasm). Aylanada ixtiyoriy A (x, y) nuqtani olamiz. Undan A_0 markazgacha masofa R ga teng. A nuqtadan A_0 nuqtagacha masofa kvadrati $(x-a)^2 + (y-b)^2$ ga teng. Shunday qilib, aylananing har bir A nuqtasining koordinatalari

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \qquad (2)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Aksincha, koordinatalari (2) tenglamani qanoatlantiruvchi istalgan A nuqta aylanaga tegishlidir, chunki undan A_0 nuqtagacha masofa R ga teng. Bundan (2) tenglama haqiqatan ham, markazi A_0 va radiusi R dan iborat aylananing tenglamasi ekanligi kelib chiqadi.

Shuni ta’kidlaymizki, aylananing markazi koordinatalar boshi bo‘lsa, aylana tenglamasi ushbu ko‘rinishga ega:

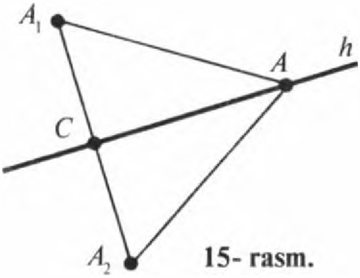
$$x^2 + y^2 = R^2.$$

To‘g‘ri chiziq tenglamasi. ***Har qanday to‘g‘ri chiziqning x, y dekart koordinatalariga nisbatan***

$$ax + by + c = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglama bilan ifodalanishini isbotlaymiz, bu yerda a, b, c — biror sonlar.

h to‘g‘ri chiziq xy tekislikdagi ixtiyoriy to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. h ga perpendikular biror to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz va unga h to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi C dan boshlab teng CA_1 va CA_2 kesmalarni qo‘yamiz (15- rasm).



15- rasm.

A_1 nuqtaning koordinatalari a_1, b_1, A_2 nuqtaning koordinatalari a_2, b_2 bo'lsin. h to'g'ri chiziqdagi har qanday A $(x; y)$ nuqtaning A_1, A_2 nuqtalardan teng uzoqlashganligini bilamiz. Shu sababli uning koordinatalari

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2 \qquad (4)$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Aksincha, biror nuqtaning x, y koordinatalari (4) tenglamani qanoatlantirsa, u nuqta A_1, A_2 nuqtalardan baravar uzoqlashadi, demak h to'g'ri chiziqqa tegishli bo'ladi. Shunday qilib, (4) tenglama h to'g'ri chiziqning tenglamasidir. Bu tenglamadagi qavslarni ochib, tenglamaning barcha hadlarini chap qismga o'tkazsak, u ushbu ko'rinishni oladi:

$$2(a_2-a_1)x+2(b_2-b_1)y+(a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2)=0.$$

$$2(a_2-a_1)=a,\ 2(b_2-b_1)=b,\ a_1^2+b_1^2-a_2^2-b_2^2=c$$

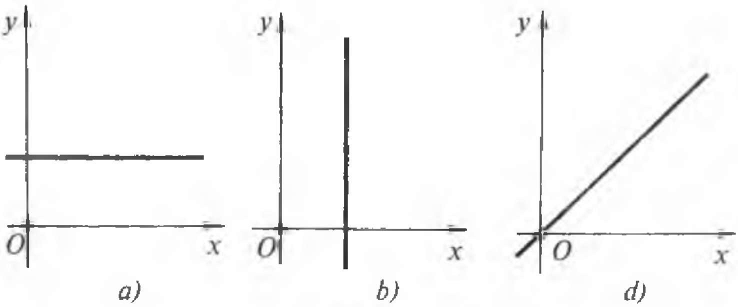
deb belgilab, (3) tenglamani hosil qilamiz. Da'vo isbotlandi.

To'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasining koordinatalari. Ikkita to'g'ri chiziq tenglamalari

$$ax+by+c=0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

berilgan bo'lsin. Ular kesishish nuqtasining koordinatalarini topamiz.

$(x; y)$ kesishish nuqtasi to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishli bo'lganligi uchun uning koordinatalari birinchi tenglamani ham, ikkinchi tenglamani ham qanoatlantiradi. Shuning uchun kesishish nuqtasining koordinatalari to'g'ri chiziqlarni beradigan tenglamalar sistemasining yechimi bo'ladi. Misol ko'ramiz.



16- rasm.

Berilgan to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalari bunday bo‘lsin:

$$3x - y + 2 = 0,$$
$$5x - 2y + 1 = 0.$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, $x = -3$, $y = -7$ ni topamiz. To‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi $(-3; -7)$.

To‘g‘ri chiziqning koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashuvi. To‘g‘ri chiziqning $ax + by + c = 0$ tenglamasi biror xususiy ko‘rinishga ega bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq koordinatalar o‘qlariga nisbatan qanday joylashganini aniqlaymiz.

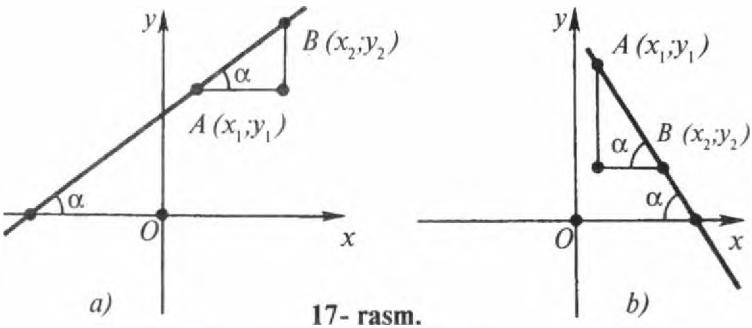
1. $a = 0$, $b \neq 0$. Bu holda to‘g‘ri chiziq tenglamasini

$$y = -\frac{c}{b}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Shunday qilib, to‘g‘ri chiziqning hamma nuqtalari bir xil $\left(-\frac{c}{b}\right)$ ordinataga ega; demak, ***to‘g‘ri chiziq x o‘qiga parallel*** (16- *a* rasm). Jumladan, agar $c = 0$ bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq x o‘q bilan ustma-ust tushadi.

2. $b = 0$, $a \neq 0$. Bu hol oldingi holga o‘xshash qaraladi. ***To‘g‘ri chiziq y o‘qiga parallel*** (16- *b* rasm) va $c = 0$ bo‘lsa, u bilan ustma-ust tushadi.

3. $c = 0$. ***To‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi,*** chunki koordinatalar boshining (0,0) koordinatalari to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi (16- *d* rasm).



17- rasm.

To'g'ri chiziq tenglamasidagi burchak koeffitsiyenti. To'g'ri chiziqning $ax + by + c = 0$ umumiy tenglamasida y oldidagi koeffitsiyent nolga teng bo'lmasa, bu tenglamani y ga nisbatan yechish mumkin:

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}.$$

Yoki $-\frac{a}{b} = k, -\frac{c}{b} = l$ deb belgilab,

$$y = kx + l$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu tenglamadagi k koeffitsiyentning geometrik ma'nosini aniqlaymiz.

To'g'ri chiziqda ikkita A $(x_1; y_1)$ va B $(x_2; y_2)$ $(x_1<x_2)$ nuqta olamiz. Ularning koordinatalari to'g'ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi:

$$y_1 = kx_1 + l, \quad y_2 = kx_2 + l.$$

Bu tengliklarni hadma-had ayirib, topamiz: $y_2 - y_1 = k(x_2 + x_1)$. Bundan

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

17- a rasmda ko'rsatilgan holda $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{tg}\alpha.$

17- b rasmda ko'rsatilgan holda $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\text{tg}\alpha.$

Shunday qilib, to'g'ri chiziq tenglamasidagi k koeffitsiyentning ishorasidan qat'iy nazar, u to'g'ri chiziqning x o‘qi bilan tashkil qilgan o‘tkir burchagining tangensiga teng.

To‘g‘ri chiziq tenglamasidagi k koeffitsiyent to‘g‘ri chiziqning ***burchak koeffitsiyenti*** deyiladi.

Chiziqli funksiya grafigi. Algebra darslarida Siz funksiyalar grafigini yasashda chiziqli funksiyaning grafigi to‘g‘ri chiziq bo‘lishini ko‘rgan bo‘lsangiz kerak. Endi shuni isbotlaymiz.

$y = ax + b$ berilgan chiziqli funksiya bo‘lsin. Uning grafigi to‘g‘ri chiziq bo‘lishini isbotlaymiz.

Berilgan funksiya uchun: agar $x = 0$ bo‘lsa, $y = b$ bo‘ladi, agar $x = 1$ bo‘lsa, $y = a + b$ bo‘ladi. Shuning uchun funksiya grafigiga $(0;\ b)$ va $(1;\ a + b)$ nuqtalar tegishli bo‘ladi. Bu nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. U

$$y = kx + l$$

ko‘rinishda bo‘lishini bilamiz. Yuqoridagi nuqtalar to‘g‘ri chiziq grafigida yotganligi uchun ularning koordinatalari to‘g‘ri chiziq tenglamasini qanoatlantiradi:

$$b = k \cdot 0 + l,$$
$$a + b = k \cdot 1 + l.$$

Bundan $l = b$, $k = a$ ni topamiz. Shunday qilib, bizning to‘g‘ri chizig‘imiz

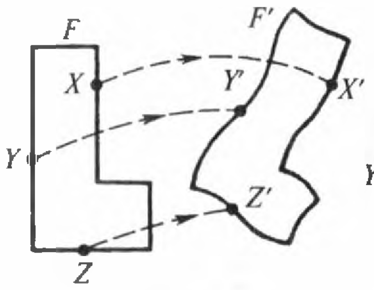
$$y = ax + b$$

tenglamaga ega. Demak, to‘g‘ri chiziq tenglamasini grafikning barcha nuqtalari qanoatlantiradi. Ya’ni chiziqli funksiyaning grafigi to‘g‘ri chiziq bo‘ladi.

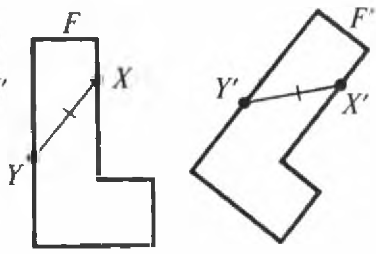
5- §. HARAKAT

Shakllarni almashtirish. Agar berilgan shaklning har bir nuqtasi biror tarzda siljitilsa, yangi shakl hosil qilinadi. Bu shakl berilgan shaklni *almashtirish* natijasida hosil qilindi deyiladi (18- rasm).

Bir shaklni ikkinchi shaklga almashtirishda nuqtalar orasidagi masofalar saqlansa, ya’ni bir shaklning istalgan



18- rasm.



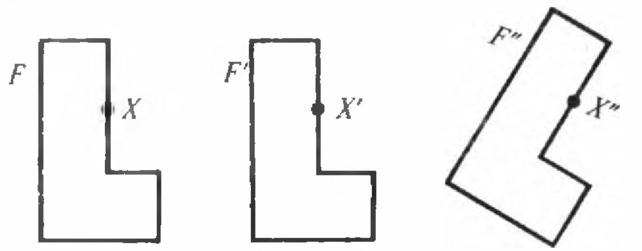
19- rasm.

ikkita X va Y nuqtasini ikkinchi shaklning X' va Y' nuqtasiga o‘tkazsa va bunda $XY = X'Y'$ tenglik bajarilsa, bu almashtirish *harakat* deyiladi (19- rasm).

F shakl harakat bilan F' shaklga, F' shakl esa harakat bilan F'' shaklga o‘tsin, deylik (20- rasm). Birinchi harakatda F shaklning X nuqtasi F' shaklning nuqtasiga o‘tsin, ikkinchi harakatda esa F' shaklning X' nuqtasi F'' shaklning X'' nuqtasiga o‘tsin deylik. U holda F shaklni F'' shaklga almashtirish, bu almashtirishda F shaklning ixtiyoriy X nuqtasi F'' shaklning X'' nuqtasiga o‘tadi, nuqtalar orasidagi masofalarni saqlaydi, demak, bu almashtirish ham harakatdir.

Harakatning bu xossasi so‘zlar bilan bunday ifodalanadi: ***ketma-ket bajarilgan ikkita harakat yana harakatni beradi.***

F shaklni F' shaklga almashtirish F shaklning turli nuqtalarini F' shaklning turli nuqtalariga o‘tkazsin deb faraz qilaylik (18- rasm). Bu almashtirishda F shaklning ixtiyoriy X nuqtasi F' shaklning X' nuqtasiga o‘tsin. F'



20- rasm.

shaklni F shaklga o‘tkazadigan almashtirish (bu almashtirishda X' nuqta X nuqtaga o‘tadi) berilgan almashtirishga ***teskari almashtirish*** deyiladi. Harakat nuqtalar orasidagi masofalarni saqlaydi, shu sababli turli nuqtalarni turli nuqtalarga o‘tkazadi.

Demak, ***harakatga teskari almashtirish ham harakatdan iborat.***

Harakatning xossalari.

5.1- teorema. ***Harakatda to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalarga o‘tadi va ularning o‘zaro joylashuv tartibi saqlanadi.***

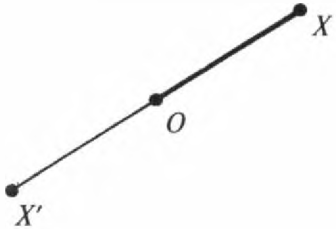
Bu esa, agar to‘g‘ri chiziqda yotuvchi A, B, C nuqtalar A_1, B_1, C_1 nuqtalarga o‘tsa, bu nuqtalarning ham to‘g‘ri chiziqda yotishini va bundan tashqari, B nuqta A va C nuqtalar orasida yotsa, B_1 nuqtaning A_1 va C_1 nuqtalar orasida yotishini bildiradi.

5.1- teoremadan quyidagi natija chiqadi: ***harakatda to‘g‘ri chiziqlar to‘g‘ri chiziqlarga, yarim to‘g‘ri chiziqlar yarim to‘g‘ri chiziqlarga, kesmalar kesmalarga o‘tadi.***

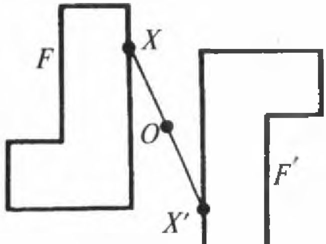
Harakatda yarim to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklar saqlanadi.

Nuqtaga nisbatan simmetriya. O — tayin nuqta va X — tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin (21- rasm). OX kesmaning davomida O nuqtadan nariga OX kesmaga teng OX' kesmani qo‘yamiz. X' nuqta *O nuqtaga nisbatan X nuqtaga simmetrik nuqta* deyiladi. O nuqtaga simmetrik nuqta shu O nuqtaning o‘zidir. Ravshanki, X' nuqtaga simmetrik nuqta X nuqtaning o‘zidir.

F shaklni F' shaklga almashtirishda F ning har bir X nuqtasi O nuqtaga nisbatan simmetrik X' nuqtaga o‘tsin,



21- rasm.



22- rasm.

bu almashtirish *O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish* deyiladi. Bunda F va F' shakllar *O nuqtaga nisbatan simmetrik shakllar* deyiladi (22- rasm).

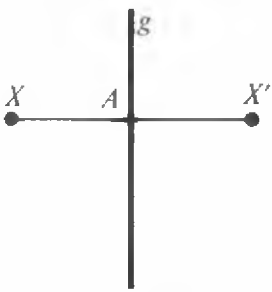
Agar O nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish F shaklni o'z-o'ziga o'tkazsa, u *markaziy simmetrik almashtirish* deyiladi, O nuqta esa simmetriya markazi deyiladi.

5.2- teorema. ***Nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish harakatdir.***

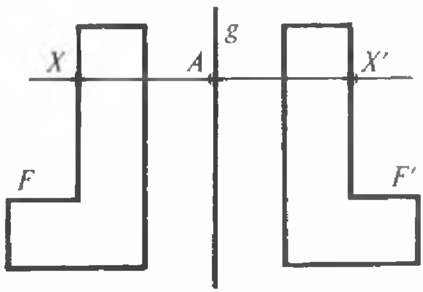
To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriya. g – tayin to'g'ri chiziq bo'lsin (23- rasm). Ixtiyoriy X nuqtani olamiz va undan g to'g'ri chiziqqa AX perpendikular tushiramiz. Bu perpendikularning davomiga A nuqtadan AX kesmaga teng AX' kesmani qo'yamiz. X' nuqta g to'g'ri chiziqqa nisbatan X nuqtaga *simmetrik nuqta* deyiladi. Agar X nuqta g to'g'ri chiziqda yotsa, unga simmetrik nuqta uning o'zidan iborat. Ravshanki, X' nuqtaga simmetrik nuqta X nuqtadan iborat.

F shaklni F' shaklga almashtirishda F ning har bir X nuqtasi berilgan g to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'lgan X' nuqtaga o'tsa, bunday almashtirish *g to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish* deyiladi. Bunda F va F' shakllar *g to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik shakllar* deyiladi (24- rasm).

Agar g to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishda F shakl o'z-o'ziga o'tsa, bu shakl *g to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik shakl* deyiladi, g to'g'ri chiziq esa shaklning *simmetriya o'qi* deyiladi.

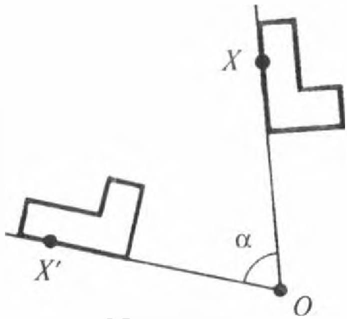


23- rasm.



24- rasm.

5.3- teorema. ***To'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirish harakatdir.***



25- rasm.

Burish. Berilgan nuqta atrofida tekislikni *burish* deb shunday harakatga aytiladiki, unda shu nuqtadan chiquvchi har bir nur bir xil yo'nalishda bir xil burchakka buriladi (25- rasm). Bu esa, agar O nuqta atrofida burishda X nuqta X' nuqtaga o'tsa, u holda OX va OX' nurlar, X nuqta qanday bo'lishiga bog'liqmas holda, bir xil burchak hosil qilishini bildiradi. Bu burchak *burish burchagi* deyiladi. Tekislikni burishda shakllarni almashtirish ham *burish* deb ataladi.

Parallel ko'chirish va uning xossalari. Parallel ko'chirish nuqtalar bir xil yo'nalishda bir xil masofada siljiydigan almashtirish sifatida ko'rsatmali aniqlanadi. Bunday ta'rif matematik jihatdan qat'iy emas, chunki unda «bir xil yo'nalishda» jumlasi ishlatilmoqda, bu jumlaning o'zi aniq ta'riflanishga muhtoj. Shu munosabat bilan biz parallel ko'chirishga boshqa, o'sha ko'rsatmali aniqlanishga (ta'rifga) javob beradigan, ammo endi jiddiy ta'rifni beramiz.

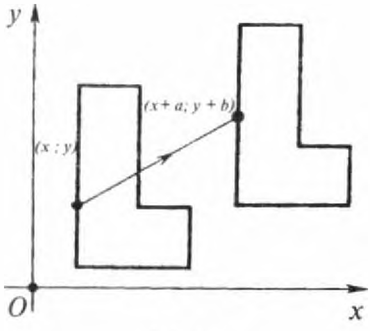
Tekislikda dekart koordinatalari x, y ni kiritamiz. F shaklni almashtirishda uning ixtiyoriy $(x;\ y)$ nuqtasi $(x+y;\ y+b)$ nuqtaga o'tsa, bunday almashtirish *parallel ko'chirish* deyiladi, bunda a va b o'zgarmas sonlar (26-rasm). Parallel ko'chirish ushbu formulalar bilan beriladi:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Bu formulalar parallel ko'chirishda $(x;\ y)$ nuqta o'tadigan nuqtaning x', y' koordinatalarini ifodalaydi.

Parallel ko'chirish harakatdir.

«Parallel ko'chirish» deb atalish shu bilan asoslanadiki, ***parallel ko'chirishda nuqtalar parallel (yoki***



26- rasm.

ustma-ust tushuvchi) to'g'ri chiziqlar bo'ylab bir xil masofaga siljiydi.

Shuni qayd qilamizki, $AA'B'B$ parallelogrammning boshqa ikki tomoni AB va $A'B'$ ham paralleldir. Bundan ushbu xulosa chiqadi: ***parallel ko'chirishda to'g'ri chiziqlar parallel to'g'ri chiziqqa (yoki o'z-o'ziga) o'tadi.***

Parallel ko'chirishning mavjudligi va yagonaligi.

5.4- teorema. ***A va A' nuqtalar qanday bo'lmasin, shunday yagona parallel ko'chirish mavjudki, unda A nuqta A' nuqtaga o'tadi.***

6- §. VEKTORLAR

Vektorning absolut qiymati va yo'nalishi. Yo'naltirilgan kesmani biz *vektor* deymiz. Vektorning yo'nalishi uning boshi va oxirini ko'rsatish bilan aniqlanadi. Chizmada vektorning yo'nalishi strelka bilan ko'rsatiladi. Vektorlarni belgilash uchun lotin alifbosining a, b, c, ... kichik harflaridan foydalanamiz. Vektorni oxirini va boshini ko'rsatish bilan ham belgilash mumkin. Bunda vektorning boshi birinchi o'ringa qo'yiladi. «Vektor» so'zi o'rniga ba'zan uning harfiy belgisi ustiga strelka yoki chiziqcha qo'yiladi.

$$\bar{a}, \vec{a} \text{ yoki } \overline{AB}, \overrightarrow{AB}.$$

Agar AB va CD yarim to'g'ri chiziqlar bir xil yo'nalgan bo'lsa, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar *bir xil yo'nalgan vektorlar* deyiladi. Agar AB va CD yarim to'g'ri chiziqlar qarama-qarshi yo'nalgan bo'lsa, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar *qarama-qarshi yo'nalgan vektorlar* deyiladi.

Vektorning absolut qiymati (yoki *moduli*) deb shu vektorni tasvirlovchi kesmaning uzunligiga aytiladi. $\bar{a}$ vektorning absolut qiymati (moduli) $|\bar{a}|$ bilan belgilanadi.

Vektorning boshi uning oxiri bilan ustma-ust tushishi mumkin. Bunday vektorni biz nol vektor deymiz. Nol vektor ustiga chiziqcha qo'yilgan nol $(\bar{0})$ bilan belgilanadi. Nol vektorning yo'nalishi haqida gapirilmaydi. Nol vektorning absolut qiymati (moduli) nolga teng deb hisoblanadi.

Vektorlarning tengligi. Agar parallel ko'chirish natijasida ikkita vektor ustma-ust tushsa, bunday vektorlar *teng vektorlar* deyiladi. Bu bir vektorning boshi va oxirini mos ravishda ikkinchi vektorning boshi va oxiriga o'tkazuvchi parallel ko'chirish mavjud ekanligini bildiradi.

Vektorlar tengligining bu ta'rifidan ushbu xulosa chiqadi: ***teng vektorlar bir xil yo'nalgan va ularning absolut qiymatlari teng.***

Aksincha: ***agar vektorlar bir xil yo'nalgan va absolut qiymatlari teng bo'lsa, ular teng bo'ladi.***

Vektorning koordinatalari. $A_1(x_1;\ y_1)$ nuqta $\bar{a}$ vektorning boshi, $A_2(x_2;\ y_2)$ nuqta esa uning oxiri bo'lsin. $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ sonlarni $\bar{a}$ vektorning koordinatalari deb ataymiz. Vektorning koordinatalarini uning harfiy belgisi yoniga qo'yamiz, qaralayotgan holda $\bar{a}\,(a_1,$ $a_2)$ yoki to'g'ridan to'g'ri $(\overline{a_1, a_2})$. Nol vektorning koordinatalari nolga teng.

Ikki nuqta orasidagi masofani shu nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalovchi formuladan koordinatalari a_1, a_2 dan iborat vektorning moduli $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ga teng degan natija chiqadi.

Teng vektorlar mos ravishda teng koordinatalarga ega. Va aksincha, ***agar vektorlarning mos koordinatalari teng bo'lsa, vektorlar teng bo'ladi.***

Vektorlarni qo'shish. Koordinatalari a_1, a_2 va b_1, b_2 bo'lgan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ *vektorlarning yig'indisi* deb koordinatalari

a_1+b_1, a_2+b_2 bo'lgan $\bar{c}$ vektorga aytiladi, ya'ni

$$\bar{a}(a_1,a_2)+\bar{b}(b_1,b_2)=\bar{c}(a_1+b_1;a_2+b_2).$$

Har qanday $\bar{a}\ (a_1,\ a_2)$, $\bar{b}\ (b_1,\ b_2)$, $\bar{c}\ (c_1,\ c_2)$ vektorlar uchun

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a},$$

$$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

6.1- teorema. ***A, B, C nuqtalar qanday bo'lmasin***

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

vektor tenglik o'rinlidir.

Vektorni songa ko'paytirish. $(\overline{a_1,a_2}$ *vektorning* λ *songa ko'paytmasi* deb $(\overline{\lambda a_1,\lambda a_2})$ vektorga aytiladi, ya'ni $(\overline{a_1,a_2})\lambda=(\overline{\lambda a_1,\lambda a_2})$.

Ta'rifga ko'ra $(\overline{a_1,a_2})\lambda=\lambda(\overline{a_1,a_2})$.

Vektorni songa ko'paytirish amalining ta'rifidan ***har qanday*** $\bar{a}$ ***vektor va*** λ, μ ***sonlar uchun***

$$(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$$

tenglik o'rinli degan natija chiqadi.

Har qanday ikkita $\bar{a}$ ***va*** $\bar{b}$ ***vektor hamda*** λ ***son uchun***

$$\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$$

tenglik o'rinli.

6.2- teorema. $\lambda\bar{a}$ ***vektorning absolut qiymati*** $|\lambda||\bar{a}|$ ***ga teng.*** $a\neq 0$ ***da*** $\lambda\bar{a}$ ***vektorning yo'nalishi*** $\lambda>0$ ***holda*** $\bar{a}$ ***vektorning yo'nalishi bilan bir xil,*** $\lambda<0$ ***holda*** $\bar{a}$ ***vektorning yo'nalishiga qarama-qarshi.***

Vektorlarning skalyar ko'paytmasi. $\bar{a}\ (a_1,\ a_2)$, $\bar{b}\ (b_1,\ b_2)$ vektorlarning *skalyar ko'paytmasi* deb $a_1b_1+a_2b_2$ songa aytiladi.

Vektorlarning skalar ko'paytmasi uchun ham sonlarning ko'paytmasi singari yozuvdan foydalaniladi. $\bar{a}\cdot\bar{a}$ skalar ko'paytma $\bar{a}^2$ bilan belgilanadi va *skalar kvadrat* deb ataladi. Ravshanki, $\bar{a}^2=|\bar{a}|^2$.

Vektorlarning skalar ko'paytmasi ta'rifidan ***har qanday $\overline{a}$ (a_1, a_2), $\overline{b}$ (b_1, b_2), $\overline{c}$ (c_1, c_2) vektorlar uchun***

$$(\overline{a} + \overline{b})\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{c} + \overline{b}\,\overline{c}$$

tenglik o'rinli degan natija chiqadi.

Noldan farqli $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ vektorlar orasidagi *burchak* deb BAC burchakka aytiladi. Ixtiyoriy ikkita $\overline{a}$, $\overline{b}$ vektor orasidagi burchak deb bosh nuqtasi umumiy va o'zlari shu vektorlarga teng vektorlar orasidagi burchakka aytiladi. Bir xil yo'nalgan vektorlar orasidagi burchak nolga teng hisoblanadi.

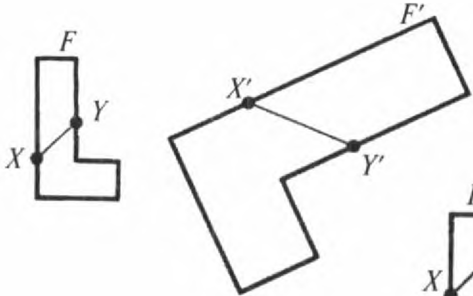
6.3- teorema. ***Vektorlarning skalar ko'paytmasi ular absolut qiymatlari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko'paytmasiga teng.***

6.3- teoremadan ushbu xulosa chiqadi: ***agar vektorlar perpendikular bo'lsa, ularning skalar ko'paytmasi nolga teng. Aksincha, noldan farqli vektorlarning skalar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, vektorlar perpendikular bo'ladi.***

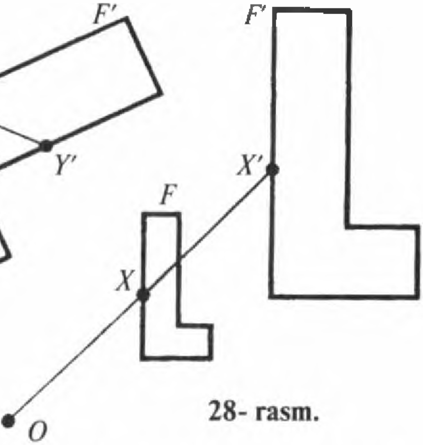
7- §. SHAKLLARNING O'XSHASHLIGI

O'xshashlik almashtirishi. Agar F shaklni F' shaklga almashtirishda nuqtalar orasidagi masofalar bir xil son marta o'zgarsa, bunday almashtirish *o'xshashlik almashtirishi* deyiladi (27- rasm). Bu esa, agar F shaklning ixtiyoriy X, Y nuqtalari o'xshashlik almashtirishi natijasida F' shaklning X', Y' nuqtalariga o'tsa, u holda $X'Y' = k \cdot XY$ bo'ladi, bunda k soni hamma X, Y nuqtalar uchun bir xil demakdir. k soni *o'xshashlik koeffitsiyenti* deyiladi. $k = 1$ bo'lganda o'xshashlik almashtirishi, ravshanki, harakatdan iborat bo'ladi.

F — berilgan shakl va O — tayinlangan nuqta bo'lsin (28- rasm). F shaklning ixtiyoriy X nuqtasi orqali OX nurni o'tkazamiz va bu nurga $k \cdot OX$ ga teng OX' kesmani qo'yamiz, bunda k — musbat son. F shaklning har bir X nuqtasi X' nuqtaga o'tadigan, ko'rsatilgan usul bilan



27- rasm.



28- rasm.

tuzilgan, almashtirishi *O markazga nisbatan gomotetiya* deyiladi. *k* soni *gomotetiya koeffitsiyenti*, *F* va F' shakllar *gomotetik shakllar* deyiladi.

7.1 - teorema. **Gomotetiya—o'xshashlik almashtirishidir.**

O'xshashlik almashtirishining xossalari. Harakat bilan ish ko'rganimiz singari o'xshashlik almashtirishida ham bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta *A*, *B*, *C* nuqta bir to'g'ri chiziqda yotuvchi uchta A_1, B_1, C_1 nuqtaga o'tishi isbotlanadi. Shu bilan birga, agar *B* nuqta *A* va *C* nuqtalar orasida yotsa, B_1 nuqta A_1 va C_1 nuqtalar orasida yotadi. Bundan ushbu xulosa chiqadi: ***o'xshashlik almashtirishi to'g'ri chiziqlarni to'g'ri chiziqlarga, yarim to'g'ri chiziqlarni yarim to'g'ri chiziqlarga, kesmalarni kesmalarga o'tkazadi.***

O'xshashlik almashtirishi yarim to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklarni saqlaydi.

Shakllarning o'xshashligi. Agar ikki shakl o'xshashlik almashtirishida bir-biriga o'tsa, ular *o'xshash shakllar* deyiladi. Shakllarning o'xshashligini belgilash uchun maxsus belgi qo'llaniladi: $F \sim F'$ yozuv bunday o'qiladi: «*F* shakl *F'* shaklga o'xshash».

Agar F_1 shakl F_2 shaklga, F_2 shakl F_3 shaklga o'xshash bo'lsa, u holda F_1 va F_3 shakllar o'xshash bo'ladi.

O‘xshashlik almashtirishining xossalaridan ushbu xulosa chiqadi: ***o‘xshash shakllarning mos burchaklari teng, mos kesmalari proporsional.*** Jumladan, ***ABC va $A_1B_1C_1$ o‘xshash uchburchaklarda:***

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1;$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Uchburchaklarning o‘xshashlik alomatlari.

7.2- teorema. ***Agar bir uchburchakning ikkita burchagi ikkinchi uchburchakning ikkita burchagiga teng bo‘lsa, bunday ikkita uchburchak o‘xshash bo‘ladi.***

7.3- teorema. ***Agar bir uchburchakning ikki tomoni ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional bo‘lsa va bu tomonlar hosil qilgan burchaklar teng bo‘lsa, bunday ikkita uchburchak o‘xshash bo‘ladi.***

7.4- teorema. ***Agar bir uchburchakning tomonlari ikkinchi uchburchakning tomonlariga proporsional bo‘lsa, bunday ikkita uchburchak o‘xshash bo‘ladi.***

To‘g‘ri burchakli uchburchakning bitta burchagi to‘g‘ri. Shu sababli 7.2- teoremaga binoan ***ikkita to‘g‘ri burchakli uchburchakning o‘xshash bo‘lishi uchun ularning bittadan o‘tkir burchaklari teng bo‘lishi yetarli.***

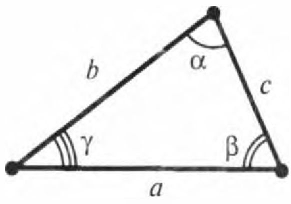
8- §. UCHBURCHAKLARNI YECHISH

8.1- teorema (kosinuslar teoremasi). ***Uchburchak istalgan tomonining kvadrati qolgan ikki tomoni kvadratlari yig‘indisidan shu ikki tomon bilan ular orasidagi burchak kosinusining ikkilangan ko‘paytmasini ayirish natijasiga teng.***

8.2- teorema (sinuslar teoremasi). ***Uchburchakning tomonlari qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional.***

Uchburchakda katta burchak qarshisida katta tomon yotadi, katta tomon qarshisida katta burchak yotadi.

Uchburchaklarni yechish uchburchakning ma’lum burchaklari va tomonlari bo‘yicha uning noma’lum to-



29- rasm.

monlari va burchaklarini topishdan iboratdir. Uchburchakning tomonlarini a, b, c bilan, burchaklarini α, β, γ bilan belgilaymiz (29- rasm).

1 - m a s a l a. Uchburchakning tomoni $a = 5$, ikkita burchagi $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$ ekani berilgan. Uning uchinchi burchagini va qolgan ikki tomonini toping.

Y e c h i l i s h i. Uchburchak burchaklarining yig'indisi 180° ga teng, shu sababli uchinchi α burchak berilgan burchaklar orqali bunday ifodalanadi:

$$\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°.$$

Bitta tomon va uchala burchakning hammasini bilgan holda, sinuslar teoremasiga ko'ra, qolgan ikki tomonni topamiz:

$$b = a \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = 5 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 105°} \approx 5 \cdot \frac{0,500}{0,966} \approx 2,59;$$

$$c = a \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \approx 5 \cdot \frac{0,707}{0,966} \approx 3,66.$$

2- m a s a l a. Uchburchakning uchta tomoni berilgan: $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$. Uning burchaklarini toping.

Y e c h i l i s h i. Burchaklar kosinuslar teoremasi bo'yicha topiladi:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{7}{8} = 0,875, \text{ bundan } \alpha \approx 29° .$$

$\cos\beta = 0,688$ ham shunga o'xshash topiladi, bundan $\beta \approx 47°$ va $\gamma \approx 180° - 47° - 29° = 104°$.

9- §. AYLANANING UZUNLIGI VA DOIRANING YUZI

Aylana uzunligi. Aylana uzunligi haqidagi ayoniy tasavvur bunday hosil qilinadi. Ipni aylana shakliga keltirilgan deb tasavvur qilamiz. Uni qirqib, uchlaridan tortamiz. Hosil qilingan kesmaning uzunligi aylana uzunligi bo'ladi. Aylana radiusini bilgan holda uning uzunligini qanday topish mumkin? Ravshanki, aylanaga ichki chizilgan muntazam ko'pburchak tomonlari soni cheksiz ortganda uning perimetri aylana uzunligiga cheksiz yaqinlashadi (30- rasm). Shunga asoslanib, aylana uzunligining ba'zi xossalarini keltirib o'tamiz.

30- rasm.

9.1- teorema. ***Aylana uzunligining diametriga nisbati aylanaga bog'liq emas, ya'ni har qanday ikkita aylana uchun bir xildir.***

Aylana uzunligining diametriga nisbati grek harfi π («pi» deb o'qiladi) bilan belgilanadi:

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

π irratsional sondir. Uning taqribiy qiymati ushbuga teng:

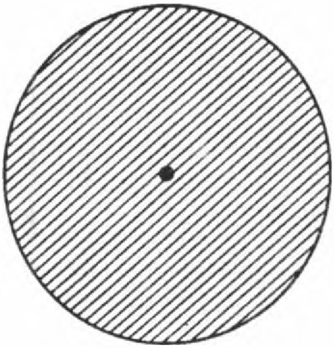
$$\pi \approx 3{,}1416.$$

π sonining taqribiy qiymati qadimgi greklargayoq ma'lum edi. π sonining eng sodda taqribiy qiymati $\frac{22}{7}$ ni Arximed topgan. Bu qiymat π sonining aniq qiymatidan 0,002 dan ham kam farq qiladi.

$\frac{l}{2R} = \pi$ bo'lgani uchun, aylana uzunligi $l = 2\pi R$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Doiraning yuzi. Agar shakl sodda, ya'ni chekli sondagi uchburchaklarga bo'linadigan bo'lsa, u holda uning yuzi shu uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. Ixtiyoriy shaklning yuzi bunday aniqlanadi.

Agar berilgan shaklni o'z ichiga oluvchi sodda shakllar va berilgan shaklning ichida yotuvchi sodda shakllar mavjud bo'lsa va bu sodda shakllar S dan istalgancha kam farq qiluvchi yuzga ega bo'lsa, berilgan shakl yuzi S ga teng bo'ladi. Bu ta'rifni doira yuzini topishga qo'llanamiz.



31- rasm.

Tekislikning berilgan nuqtasidan berilgan masofadan katta bo'lmagan masofada yotuvchi barcha nuqtalaridan iborat shakl *doira* deb aytiladi. Bu nuqta *doiraning markazi* deyiladi, berilgan masofa esa *doiraning radiusi* deyiladi. Doiraning chegarasi aylanadan iborat bo'lib, bu aylananing markazi va radiusi doiraning markazi va radiusidir (31- rasm).

Doiraning yuzi uni chegaralovchi aylana uzunligi bilan radiusi ko'paytmasining yarmiga teng.

Doiraviy sektor deb doiraning mos markaziy burchagi ichidagi qismiga aytiladi (32- rasm).

Doiraviy sektorning yuzi

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$$

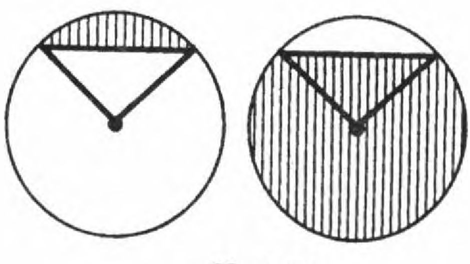
shakl bo'yicha hisoblanadi, bunda R — doira radiusi, α esa mos markaziy burchakning gradus o'lchovi.

Doira bilan yarim tekislikning umumiy qismi *doiraviy segment* deyiladi (33- rasm).

Yarim doiraga teng bo'lmagan segmentning yuzi

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_{\Delta}$$

32- rasm.



33- rasm.

formula bo'yicha hisoblanadi, bunda α – shu doiraviy segment yoyini o'z ichiga olgan markaziy burchakning gradus o'lchovi, S_Δ esa uchlari doira markazi bilan tegishli sektorni chegaralovchi radiuslar oxirlaridan iborat uchburchakning yuzi. $\alpha < 180°$ bo'lganda « – » ishorani, $\alpha > 180°$ bo'lganda « + » ishorani olish kerak.

Planimetriya mavzularini takrorlashga doir masalalar

1. AB nurda C nuqta belgilangan. Agar: 1) $AB = 1{,}5$ m, $AC = 0{,}3$ m; 2) $AB = 2$ sm, $AC = 4{,}4$ sm bo'lsa, BC kesma uzunligini toping.

2. Kesishuvchi ikkita to'g'ri chiziq berilgan. Berilgan ikki to'g'ri chiziqning har biriga parallel bo'lgan uchinchi to'g'ri chiziqni o'tkazish mumkin.

3. Teng yonli uchburchakning perimetri 15,6 m ga teng. Agar 1) asosi yon tomonidan 3 m kam bo'lsa; 2) asosi yon tomonidan 3 m katta bo'lsa, uning tomonlarini toping.

4. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarda $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ ekanini isbotlang.

5. Agar parallelogrammning kamida bitta burchagi to'g'ri burchak bo'lsa, u to'g'ri to'rtburchak bo'lishini isbotlang.

6. Har bir kateti 2 m dan bo'lgan teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak ichiga kvadrat chizilgan bo'lib, u uchburchak bilan umumiy burchakka ega. Kvadrat perimetrini toping.

7. Berilgan kesmani: 1) 3 ta; 2) 5 ta; 3) 6 ta teng bo'lakka bo'ling.

8. Teng yonli trapetsiyaning qarama-qarshi burchaklari ayirmasi 40° ga teng ekani ma'lum bo'lsa, uning burchaklari nimaga teng?

9. Uchlari O (0; 0), A (0; 2), B (–4; 0) nuqtalarda bo'lgan uchburchak tomonlari o'rtalarining koordinatalarini toping.

10. Agar: 1) $A(2;\ 3)$, $B(3;\ 2)$; 2) $A(4;\ -1)$, $B(-6;\ 2)$; 3) $A(5;\ -3)$, $B(-1;\ -2)$ bo‘lsa, AB to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

11. Quyidagi tenglamalar bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidan ikkitadan parallellarini toping: 1) $x+y=1$; 2) $y=x-1$; 3) $x-y=2$; 4) $y=4$; 5) $y=3$; 6) $2x+2y+3=0$.

12. x o‘qiga parallel va (2; 3) nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

13. Agar: 1) $\bar{a}(1;\ -4)$, $\bar{b}\ (-4;\ 8)$; 2) $\bar{a}\ (2;\ 5)$, $\bar{b}\ (4;\ 3)$ berilgan bo‘lsa, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar yig‘indisiga teng bo‘lgan $\bar{c}$ vektorni va shu $\bar{c}$ vektorning absolut qiymatini toping.

14. $\bar{a}\ (3;\ 2)$ va $\bar{b}\ (0;\ -1)$ vektorlar berilgan. $\bar{c}=-2\bar{a}+$ $+4\bar{b}$ vektorni va uning absolut qiymatini toping.

15. Uchburchakning a, b, c tomonlari berilgan. Uning m_a, m_b, m_c medianalarini toping.

16. Uchburchakning tomonlari 0,8 m, 1,6 m va 2 m ga teng. Perimetri 5,5 m ga teng bo‘lib, berilgan uchburchakka o‘xshash uchburchak tomonlarini toping.

17. Uchburchakning ikki tomoni va bu tomonlardan birining qarshisidagi burchak berilgan. Agar:

1) $a=12$, $b=5$, $\lambda=120°$;
2) $a=27$, $b=9$, $\lambda=138°$;
3) $a=34$, $b=12$, $\lambda=164°$

bo‘lsa, uning qolgan burchaklarini va tomonlarini toping.

18. Agar $\angle A=60°$, $\angle B=45°$ bo‘lsa, ABC uchburchak burchaklarining radian o‘lchovini toping.

STEREOMETRIYA

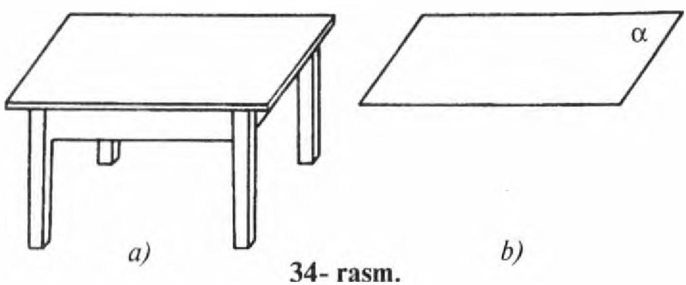
1- §. STEREOMETRIYA AKSIOMALARI VA ULARNING ENG SODDA NATIJALARI

1. Stereometriya aksiomalari

Stereometriya — geometriyaning bir bo‘limi bo‘lib, unda fazodagi shakllar o‘rganiladi. Stereometriyada, planimetriyadagi singari, geometrik shakllarning xossalari tegishli teoremalarni isbotlash yo‘li bilan aniqlanadi. Bunda aksiomalar bilan ifodalanuvchi asosiy geometrik shakllarning xossalari asos bo‘lib xizmat qiladi. Fazoda asosiy shakllar nuqta, to‘g‘ri chiziq va tekislikdir.

Tekislikni biz stol usti kabi tekis sirt deb tasavvur qilamiz (34- *a* rasm) va shuning uchun uni parallelogramm ko‘rinishida tasvirlaymiz (34- *b* rasm). Tekislik ham to‘g‘ri chiziq kabi cheksizdir. Rasmda biz tekislikning faqat bir qisminigina tasvirlaymiz, lekin uni hamma tomonga cheksiz davom etgan deb tasavvur qilamiz. Tekisliklar α, β, γ, ... grek harflari bilan belgilanadi.

Yangi geometrik obraz — tekislikning kiritilishi aksiomalar sistemasini kengaytirishga majbur etadi. Shuning uchun biz aksiomalarning **S** guruhini kiritamiz, u tekisliklarning fazodagi asosiy xossalarini ifodalaydi. Bu guruh quyidagi uchta aksiomadan iborat:



34- rasm.

S_1. ***Tekislik qanday bo'lmasin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud.***

S_2. ***Agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular shu nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi.***

Bu aksioma ikkita turli α va β tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu tekisliklardan har biriga tegishli c to'g'ri chiziqning mavjudligini tasdiqlaydi. Bunda, agar, biror C nuqta ikkala tekislikka tegishli bo'lsa, u c to'g'ri chiziqqa ham tegishli bo'ladi.

S_3. ***Agar ikkita turli to'g'ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.***

Bu esa ikkita turli a, b to'g'ri chiziqlar umumiy C nuqtaga ega bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlarni o'z ichiga olgan γ tekislik mavjud, demakdir. Bunday xossaga ega tekislik yagonadir.

Shunday qilib, stereometriyaning aksiomalari sistemasi planimetriyaning aksiomalaridan va aksiomalarning **S** guruhidan iborat.

Eslatma. Planimetriyada biz qarayotgan hamma shakllar joylashadigan bitta tekislikka ega edik. Stereometriyada esa tekisliklar ko'p, hatto cheksiz ko'p. Shu munosabat bilan planimetriyaning ba'zi aksiomalari ifodasi, stereometriya aksiomalari kabi, aniqlashtirishni talab qiladi. Bu gap IV, VII VIII, IX aksiomalarga tegishli. Shu aniqlashtirilgan ifodalarni keltiramiz.

IV. *Tekislikka tegishli* to'g'ri chiziq bu tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi.

VII. *Tekislikka tegishli bo'lgan* yarim to'g'ri chiziqdan berilgan yarim tekislikka 180° dan kichik bo'lgan berilgan gradus o'lchovli burchak qo'yish mumkin va faqat birgina.

VIII. Uchburchak qanday bo'lmasin *berilgan tekislikda* undagi berilgan yarim to'g'ri chiziqqa nisbatan berilgan vaziyatda joylashgan shu uchburchakka teng uchburchak mavjud bo'ladi.

IX. *Tekislikda* berilgan to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to'g'ri chiziq o'tkazib bo'lmaydi.

Bayon qilish qulay bo‘lishi uchun I aksiomani eslatib o‘tamiz.

I. To‘g‘ri chiziqni har qanday olmaylik, shu to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lgan nuqtalar ham, tegishli bo‘lmagan nuqtalar ham mavjud. Har qanday ikki nuqtadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va faqat bitta.

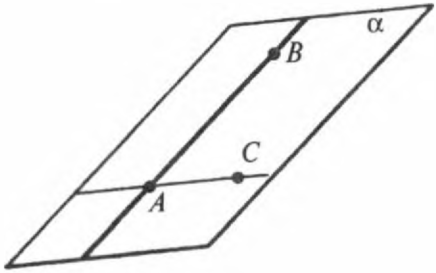
2. Berilgan to‘g‘ri chiziqdan va berilgan nuqtadan o‘tuvchi tekislikning mavjudligi

1.1-teorema. ***To‘g‘ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.***

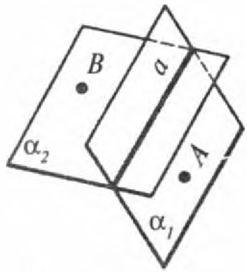
Isboti. AB — berilgan to‘g‘ri chiziq, C esa unda yotmagan nuqta bo‘lsin (35- rasm). A va C nuqtalar orqali to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz (I aksioma). AB va AC to‘g‘ri chiziqlar har xil, chunki C nuqta AB to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. AB va AC to‘g‘ri chiziqlar orqali α tekislikni o‘tkazamiz (S_3 aksioma). Bu tekislik AB to‘g‘ri chiziq va C nuqta orqali o‘tadi.

AB to‘g‘ri chiziq va C nuqta orqali o‘tuvchi α tekislik yagona ekanini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, AB to‘g‘ri chiziq va C nuqtadan o‘tuvchi boshqa α' tekislik mavjud bo‘lsin. C_2 aksiomaga ko‘ra α va α' tekisliklar to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Bu to‘g‘ri chiziqda A, B, C nuqtalar yotishi kerak. Biroq ular bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Biz ziddiyatga keldik. Teorema isbotlandi.



35- rasm.

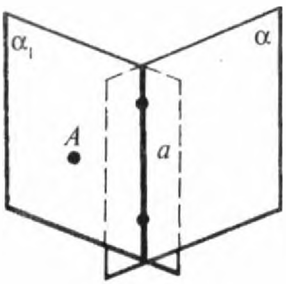


36- rasm.

Masala (4)[1]. To'g'ri chiziq orqali ikkita turli tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Yechilishi. Faraz qilaylik, a — berilgan to'g'ri chiziq bo'lsin (36- rasm). I aksiomaga ko'ra a to'g'ri chiziqda yotmaydigan A nuqta mavjud. 1.1- teorema bo'yicha a to'g'ri chiziq va A nuqta orqali tekislik o't-kazish mumkin, uni α_1 bilan belgilaymiz. S_1 aksiomaga ko'ra α_1 tekislikda yotmaydigan B nuqta mavjud. a to'g'ri chiziq va B nuqta orqali α_2 tekislikni o'tkazamiz. α_1 va α_2 tekisliklar har xil, chunki α_2 tekislikning B nuqtasi α_1 tekislikda yotmaydi.

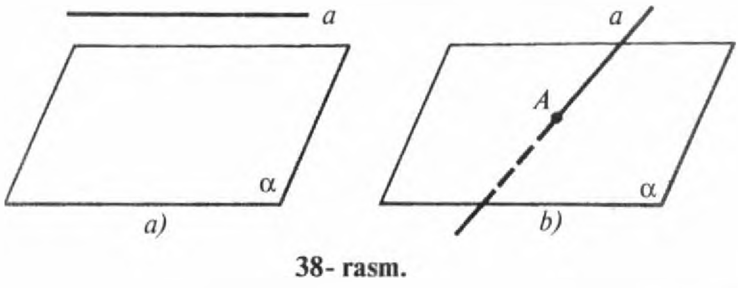
3. To'g'ri chiziqning tekislik bilan kesishishi



37- rasm.

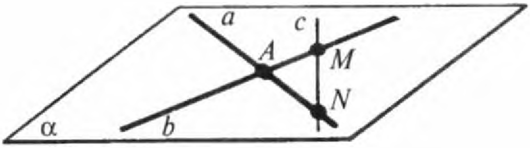
1.2- teorema. ***To'g'ri chiziqning ikkita nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, u holda to'g'ri chiziqning o'zi ham tekislikka tegishli bo'ladi.***

Isboti. a — berilgan to'g'ri chiziq va α — berilgan tekislik bo'lsin (37- rasm). I aksiomaga ko'ra a to'g'ri chiziqda yotmaydigan A nuqta mavjud. a to'g'ri chiziq va A nuqta orqali α' tekislikni o'tkazamiz. Agar α' tekislik



38- rasm.

[1] Qavslar ichidagi sonlar masalaning paragraf oxirida keltirilgan masalalar ro'yxatidagi tartib raqamini bildiradi.



39- rasm.

α tekislik bilan ustma-ust tushsa, u holda α tekislik *a* to‘g‘ri chiziqni o‘z ichiga oladi, buni teorema tasdiqlaydi. Lekin α′ tekislik α tekislikdan farq qilsa, bu tekisliklar *a* to‘g‘ri chiziqning ikkita nuqtasini o‘z ichiga olgan *a′* to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. I aksiomaga ko‘ra *a′* to‘g‘ri chiziq *a* to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushadi va demak, *a* to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi. Teorema isbotlandi.

1.2- teoremadan shunday xulosa chiqadi: ***tekislik va unda yotmaydigan to‘g‘ri chiziq yo kesishmaydi, yoki bitta nuqtada kesishadi*** (38- rasm).

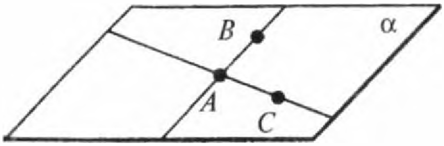
M a s a l a (6). *A* nuqtada kesishuvchi ikkita turli to‘g‘ri chiziq berilgan. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadigan va *A* nuqtadan o‘tmaydigan hamma to‘g‘ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

Y e c h i l i s h i. Berilgan *a, b* to‘g‘ri chiziqlar orqali α tekislik o‘tkazamiz (39- rasm). Buni S_3 aksiomaga asosan bajarish mumkin. Berilgan to‘g‘ri chiziqlarni kesuvchi *c* to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan ikkita *M* va *N* umumiy nuqtaga ega (berilgan to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari). 1.2- teoremaga ko‘ra bu to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotishi kerak.

4. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislikning mavjudligi

1.3- t e o r e m a. ***Bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.***

I s b o t i. *A, B, C* — bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan berilgan uchta nuqta bo‘lsin (40- rasm). *AB* va *AC* to‘g‘ri chiziqlarni o‘tkazamiz: ular turli, chunki *A, B, C* nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. S_3 aksiomaga ko‘ra *AB* va *AC* to‘g‘ri chiziqlar orqali α tekislik o‘tkazish mumkin. Bu tekislik *A, B, C* nuqtalarni o‘z ichiga oladi.



40- rasm.

A, B, C nuqtalardan o'tuvchi α tekislikning yagonaligini isbotlaymiz. Haqiqatan, 1.2- teoremaga ko'ra A, B, C nuqtalardan o'tuvchi tekislik AB va AC to'g'ri chiziqlarni o'z ichiga oladi, S_3 aksiomaga ko'ra esa bunday tekislik yagonadir.

M a s a l a (8). Bir to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqtadan tekislik o'tkazish mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

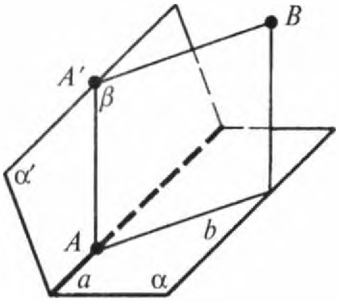
Y e c h i l i s h i. A, B, C — a to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqta bo'lsin. a to'g'ri chiziqda yotmaydigan D nuqtani olamiz (I aksioma). A, B, D nuqtalar orqali tekislik o'tkazish mumkin (1.3- teorema). Bu tekislik a to'g'ri chiziqning ikkita A, B nuqtasini o'z ichiga oladi, demak, shu to'g'ri chiziqning C nuqtasini ham o'z ichiga oladi (1.2- teorema). Demak, bir to'g'ri chiziqda yotgan uchta nuqta orqali har doim tekislik o'tkazish mumkin ekan.

5. I Aksiomaga izohlar

I aksioma stereometriya aksiomalari ro'yxatida planimetriyada ega bo'lgan ma'nosiga nisbatan yangicha ma'noni egallaydi. Planimetriyada bu aksioma tekislikda yotgan berilgan *to'g'ri chiziqdan* tashqarida nuqtalar mavjudligini tasdiqlaydi. Bu aksiomadan biz geometriyani tekislikda yasashda aynan shu ma'noda foydalangan edik. Endi esa bu aksioma berilgan to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtalarning umuman mavjudligini tasdiqlaydi. Undan tekislikda yotgan berilgan to'g'ri chiziq tashqarisida nuqtalar mavjud ekani bevosita kelib chiqmaydi. Bu maxsus isbotlashni talab qiladi. Shunday isbotni beramiz.

Faraz qilaylik, α — tekislik va a — shu tekislikdagi to'g'ri chiziq bo'lsin (41- rasm). α tekislikda a to'g'ri chiziqda yotmaydigan nuqtalar mavjudligini isbotlaymiz.

a to‘g‘ri chiziqda A nuqtani belgilaymiz va α tekislik tashqarisida A' nuqtani belgilaymiz. a to‘g‘ri chiziq va A' nuqta orqali α' tekislik o‘tkazamiz. α' tekislik tashqarisida B nuqtani olamiz va AA' to‘g‘ri chiziq hamda B nuqta orqali β tekislikni o‘tkazamiz. α va β tekisliklar A nuqtadan o‘tuvchi hamda a to‘g‘ri chiziqdan farqli b to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Bu to‘g‘ri chiziqning A nuqtadan farqli nuqtalari α tekislikda a to‘g‘ri chiziqdan tashqarida yotadi. Shuni isbot qilish talab qilingan edi.



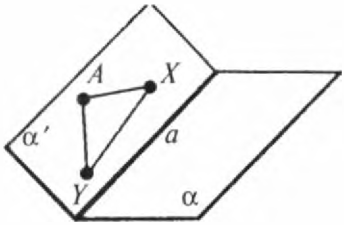
41- rasm.

6. Fazoni tekislik bilan ikkita yarim fazoga ajratish

1.4- t e o r e m a. ***Tekislik fazoni ikkita yarim fazoga ajratadi. Agar X va Y nuqtalar bitta yarim fazoga tegishli bo‘lsa, u holda XY kesma tekislikni kesib o‘tmaydi. Agar X va Y nuqtalar turli yarim fazolarga tegishli bo‘lsa, u holda XY kesma tekislikni kesib o‘tadi.***

I s b o t i (yodlab olish uchun emas). Faraz qilaylik, α — berilgan tekislik bo‘lsin. α tekislikda yotmaydigan A nuqtani belgilaymiz. S_1 aksiomaga ko‘ra bunday nuqta mavjud. Fazoning α tekislikda yotmaydigan hamma nuqtalarini ikkita yarim fazoga quyidagi tarzda ajratamiz. Agar AX kesma α tekislikni kesib o‘tmasa, X nuqta birinchi yarim fazoga tegishli, agar AX kesma α tekislikni kesib o‘tsa, ikkinchi yarim fazoga tegishli deymiz. Fazoni bunday ajratish (bo‘lish) teoremada ko‘rsatilgan xossalarga ega ekanini ko‘rsatamiz.

X va Y nuqtalar birinchi yarim fazoga tegishli bo‘lsin. A, X va Y nuqtalar orqali α' tekislik o‘tkazamiz. Agar α' tekislik α tekislikni kesib o‘tmasa, u holda XY kesma ham bu tekislikni kesib o‘tmaydi. Faraz qilaylik, α' tekislik α tekislikni kesib o‘tsin (42-rasm). Tekisliklar turli bo‘lgani



42- rasm.

uchun ular biror a to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. a to'g'ri chiziq α' tekislikni ikkita yarim tekislikka bo'ladi. X va Y nuqtalar bitta yarim tekislikka tegishli, aynan A nuqta yotgan yarim tekislikka tegishli. Shuning uchun XY kesma a to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydi, demak, α tekislikni ham kesib o'tmaydi.

Agar X va Y nuqtalar ikkinchi yarim fazoga tegishli bo'lsa, u holda α' tekislik oldindan α tekislikni kesib o'tadi, chunki AX kesma α tekislikni kesib o'tadi. X va Y nuqta a to'g'ri chiziq bilan bo'lingan α' tekislikning bitta yarim tekisligiga tegishli. Demak, XY kesma a to'g'ri chiziqni kesib o'tmaydi, binobarin, α tekislikni ham kesib o'tmaydi.

Nihoyat, agar X nuqta bitta yarim fazoga tegishli bo'lsa, Y nuqta esa ikkinchi yarim fazoga tegishli bo'lsa, u holda α' tekislik α tekislikni kesib o'tadi, X va Y nuqtalar esa a to'g'ri chiziqqa nisbatan α' tekislikning turli yarim tekisliklarida yotadi. Shuning uchun XY kesma a to'g'ri chiziqni kesib o'tadi, demak, α tekislikni ham kesib o'tadi. Teorema isbotlandi.

? *Tekshirish uchun savollar*

1. Stereometriya nima?
2. S guruh aksiomalarini ifodalang.
3. To'g'ri chiziq va unda yotmaydigan nuqta orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.
4. Agar to'g'ri chiziqning ikki nuqtasi tekislikka tegishli bo'lsa, to'g'ri chiziqning o'zi ham tekislikka butunlay tegishli ekanini isbotlang.
5. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqtadan bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

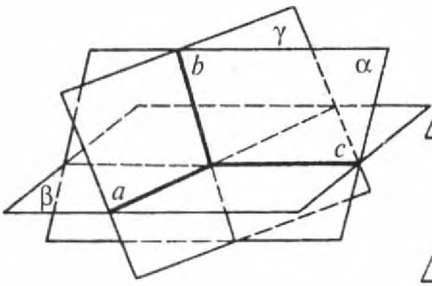
MASALALAR

1. *A, B, C* va *D* nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziqlarning kesishmasligini isbotlang.

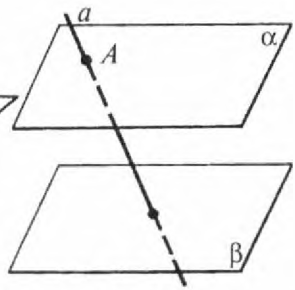
2. *A, B, C* nuqtalar ikkita turli tekislikning har birida yotadi. Bu nuqtalarning bir to‘g‘ri chiziqda yotishini isbotlang.

3. Juft-jufti bilan kesishuvchi uchta turli tekislik berilgan. Agar bu tekisliklarning kesishmasidagi ikkita to‘g‘ri chiziq kesishsa, u holda uchinchi to‘g‘ri chiziq ularning kesishish nuqtasidan o‘tishini isbotlang (43-rasm).

4. To‘g‘ri chiziq orqali ikkita turli tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang.



43- rasm.



44- rasm.

5*. Kesishmaydigan ikkita tekislik berilgan. Bu tekisliklardan birini kesuvchi to‘g‘ri chiziq ikkinchisini ham kesib o‘tishini isbotlang (44- rasm).

6. *A* nuqtada kesishuvchi ikkita turli to‘g‘ri chiziq berilgan. Berilgan ikki to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadigan va *A* nuqtadan o‘tmaydigan hamma to‘g‘ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

7. Agar *AB* va *CD* to‘g‘ri chiziqlar bir tekislikda yotmasa, *AC* va *BD* to‘g‘ri chiziqlar ham bir tekislikda yotmaydi. Shuni isbotlang.

8. Bir to‘g‘ri chiziqda yotgan uchta nuqtadan tekislik o‘tkazish mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

2- §. TO‘G‘RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING PARALLELLIGI

7. Fazoda parallel to‘g‘ri chiziqlar

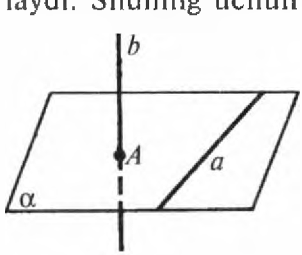
Fazodagi ikki to‘g‘ri chiziq bir tekislikda yotsa va kesishmasa, ular *parallel to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi. Kesishmaydigan va bir tekislikda yotmaydigan to‘g‘ri chiziqlar *ayqash to‘g‘ri chiziqlar* deyiladi (45- rasm).

M a s a l a (2). Berilgan ikki parallel to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvchi hamma to‘g‘ri chiziqlarning bir tekislikda yotishini isbotlang.

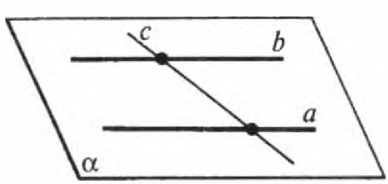
Y e c h i l i s h i. Berilgan a, b to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lgani uchun ular orqali tekislik o‘tkazish mumkin (46- rasm). Uni α bilan belgilaymiz. Berilgan parallel to‘g‘ri chiziqlarni kesib o‘tuvchi c to‘g‘ri chiziq α tekislik bilan ikkita umumiy nuqtaga ega — berilgan to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalari. 1.2- teoremaga ko‘ra bu to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotadi. Shunday qilib, berilgan ikkita parallel to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvchi hamma to‘g‘ri chiziqlar bitta tekislikda — α tekislikda yotadi.

2.1 - t e o r e m a. ***To‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va faqat bitta.***

E s l a t m a. 2.1- teoremadagi yagonalik sharti parallel to‘g‘ri chiziqlar aksiomasining oddiy natijasi emas, chunki bu aksioma berilgan tekislikda berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallel to‘g‘ri chiziqning yagonaligini tasdiqlaydi. Shuning uchun uni isbotlash kerak.

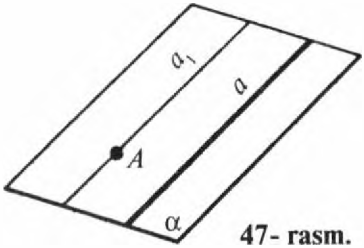


45- rasm.



46- rasm.

I s b o t i. a — berilgan to‘g‘ri chiziq va A — bu to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqta bo‘lsin (47- rasm). a to‘g‘ri chiziq va A nuqta orqali α tekislik o‘tkazamiz. α tekislikda A nuqtadan a to‘g‘ri chiziqqa parallel a_1 to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. a ga parallel bo‘lgan a_1 to‘g‘ri chiziqning yagona ekanini isbotlaymiz.



47- rasm.

Faraz qilaylik, A nuqtadan o‘tadigan va a to‘g‘ri chiziqqa parallel boshqa a_2 to‘g‘ri chiziq mavjud bo‘lsin, a va a_2 to‘g‘ri chiziqlar orqali α_2 tekislikni o‘tkazish mumkin. α_2 tekislik a to‘g‘ri chiziq va A nuqta orqali o‘tadi; demak, 1.1- teoremaga ko‘ra u α tekislik bilan ustma-ust tushadi. Endi parallel to‘g‘ri chiziqlar aksiomasi bo‘yicha a_1 va a_2 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi. Teorema isbotlandi.

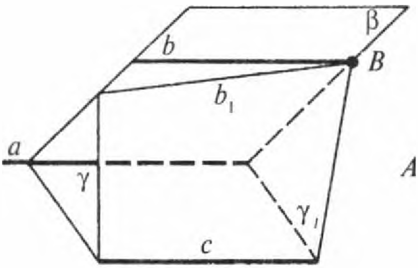
8. To‘ri chiziqlarning parallellik alomati

2.2- t e o r e m a. ***Uchinchi to‘g‘ri chiziqqa parallel ikki to‘g‘ri chiziq paralleldir.***

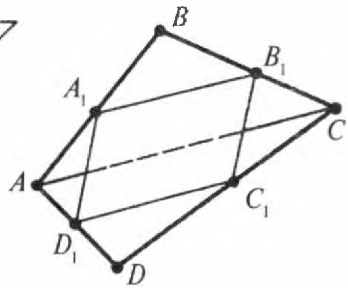
I s b o t i. b, c to‘g‘ri chiziqlar a to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsin. b va c to‘g‘ri chiziqlarning parallel ekanini isbotlaymiz.

a, b, c to‘g‘ri chiziqlar bir tekislikda yotgan hol planimetriya kursida qarab o‘tilgan edi. Shuning uchun berilgan to‘g‘ri chiziqlar bir tekislikda yotmaydi deb faraz qilamiz. β a, b to‘g‘ri chiziqlar yotgan tekislik, γ esa a, c to‘g‘ri chiziqlar yotgan tekislik bo‘lsin. β va γ tekisliklar turli (48- rasm). b to‘g‘ri chiziqda biror B nuqtani belgilab, c to‘g‘ri chiziq va B nuqta orqali γ_1 tekislikni o‘tkazamiz. U β tekislikni b_1 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesib o‘tadi.

b_1 to‘g‘ri chiziq γ tekislikni kesib o‘tmaydi. Haqiqatan, kesishish nuqtasi a to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lishi kerak edi, chunki b_1 to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotadi. Ikkinchi tomondan, u c to‘g‘ri chiziqda ham yotishi kerak edi,



48- rasm.



49- rasm.

chunki b_1 to‘g‘ri chiziq γ_1 tekislikda yotadi. Ammo, a, c to‘g‘ri chiziqlar parallel bo‘lgani uchun kesishmaydi.

b_1 to‘g‘ri chiziq β tekislikda yotgani uchun va a to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmagani uchun u a ga parallel, demak, parallel to‘g‘ri chiziqlar aksiomasiga ko‘ra b bilan ustma-ust tushadi. Shunday qilib, b to‘g‘ri chiziq b_1 to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tusha turib, c to‘g‘ri chiziq bilan bir tekislikda yotadi (γ_1 tekislikda) va uni kesib o‘tmaydi. Demak, b, c to‘g‘ri chiziqlar parallel. Teorema isbotlandi.

Masala (6). Fazoviy to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalari parallelogrammning uchlari bo‘lishini isbotlang (fazoviy to‘rtburchakning uchlari bitta tekislikda yotmaydi).

Yechilishi. $ABCD$ — berilgan fazoviy to‘rtburchak bo‘lsin (49- rasm). Aytaylik, A_1, B_1, C_1, D_1 — to‘rtburchak tomonlarining o‘rtalari. U holda A_1B_1 ABC uchburchakning AC tomoniga parallel o‘rta chizig‘i, C_1D_1 ACD uchburchakning AC tomoniga parallel o‘rta chizig‘i bo‘ladi. 2.2-teoremaga ko‘ra A_1B_1 va C_1D_1 to‘g‘ri chiziqlar parallel va demak, bir tekislikda yotadi. A_1D_1, B_1C_1 to‘g‘ri chiziqlarning parallelligi ham shunday isbotlanadi. Shunday qilib, $A_1B_1C_1D_1$ to‘rtburchak bir tekislikda yotadi va uning qarama-qarshi tomonlari parallel. Demak, u parallelogramm.

9. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning parallellik alomati

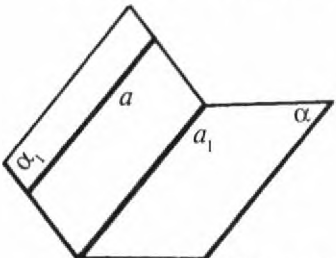
Agar to‘g‘ri chiziq bilan tekislik kesishmasa, ular *parallel* deyiladi.

2.3- t e o r e m a . ***Agar tekislikda yotmagan to‘g‘ri chiziq shu tekislikdagi biror to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikning o‘ziga ham parallel bo‘ladi.***

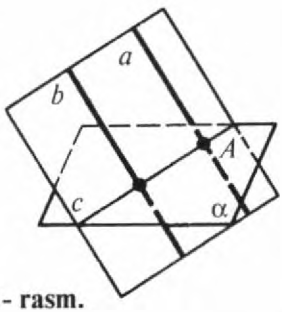
I s b o t i . α — tekislik, a — unda yotmagan to‘g‘ri chiziq va a_1 esa α tekislikda yotgan va a ga parallel to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. a va a_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali α_1 tekislikni o‘tkazamiz (50- rasm). α va α_1 tekisliklar a_1 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. Agar a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘tganida edi, u holda kesishish nuqtasi a_1 to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lar edi. Ammo bu hol yuz berishi mumkin emas, chunki a, a_1 to‘g‘ri chiziqlar parallel. Shunday qilib, a to‘g‘ri chiziq α tekislikni kesib o‘tmaydi, demak, α tekislikka parallel. Teorema isbotlandi.

M a s a l a (9). Agar tekislik ikki parallel to‘g‘ri chiziqdan birini kesib o‘tsa, u ikkinchisini ham kesib o‘tishini isbotlang.

Y e c h i l i s h i . a va b — ikki parallel to‘g‘ri chiziq α a to‘g‘ri chiziqni A nuqtada kesib o‘tuvchi tekislik bo‘lsin (51- rasm). a va b to‘g‘ri chiziqlardan tekislik o‘tkazamiz. U α tekislikni biror c to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesadi. c to‘g‘ri chiziq a to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tadi (A nuqtada), demak, unga parallel bo‘lgan b to‘g‘ri chiziqni ham kesib o‘tadi. c to‘g‘ri chiziq α tekislikda yotgani uchun α tekislik b to‘g‘ri chiziqni ham kesib o‘tadi.



50- rasm.



51- rasm.

10. Tekisliklarning parallellik alomati

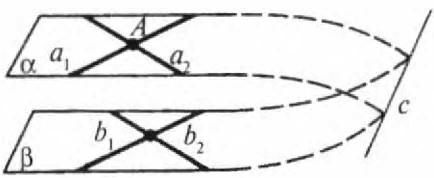
Agar ikki tekislik kesishmasa, ular *parallel* tekisliklar deyiladi.

2.4-teorema. ***Agar bir tekislikning kesishuvchi ikki to'g'ri chizig'i ikkinchi tekislikdagi ikki to'g'ri chiziqqa mos holda parallel bo'lsa, bu tekisliklar parallel bo'ladi.***

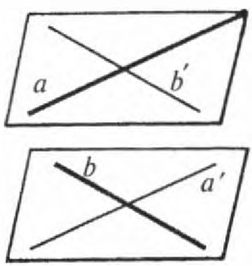
Isboti. α va β — berilgan tekisliklar, a_1 va a_2 α tekislikdagi A nuqtada kesishuvchi to'g'ri chiziqlar, b_1 va b_2 esa β tekislikdagi mos holda ularga parallel to'g'ri chiziqlar bo'lsin (52- rasm). Faraz qilaylik, α va β tekisliklar parallel bo'lmasin, ya'ni biror c to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadigan bo'lsin. 2.3- teoremaga ko'ra a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlar b_1 va b_2 to'g'ri chiziqlarga parallel to'g'ri chiziqlar sifatida β tekislikka parallel va shuning uchun ham bu tekislikda yotgan c to'g'ri chiziqni kesmaydi. Shunday qilib, α tekislikda A nuqta orqali c to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan ikkita to'g'ri chiziq (a_1 va a_2) o'tadi. Bu esa parallel to'g'ri chiziqlar haqidagi aksiomaga ko'ra bo'lishi mumkin emas. Biz qarama-qarshilikka duch keldik. Teorema isbotlandi.

Masala (10). Ikki ayqash to'g'ri chiziq orqali parallel tekisliklar o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Yechilishi. a va b — berilgan ayqash to'g'ri chiziqlar bo'lsin (53- rasm). a to'g'ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan b to'g'ri chiziqqa parallel qilib b' to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. b to'g'ri chiziqdagi ixtiyoriy nuqta orqali esa a to'g'ri chiziqqa parallel a' to'g'ri



52- rasm.



53- rasm.

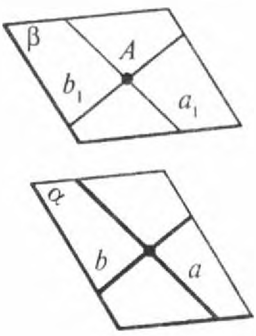
chiziqni o‘tkazamiz. Endi ikkita tekislik o‘tkazamiz: birini a va b' to‘g‘ri chiziqlar orqali, ikkinchisini b va a' to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tkazamiz. 2.4- teoremaga ko‘ra bu tekisliklar parallel. Ulardan birinchisida a to‘g‘ri chiziq, ikkinchisida b to’g’ri chiziq yotadi.

11. Berilgan tekislikka parallel tekislikning mavjudligi

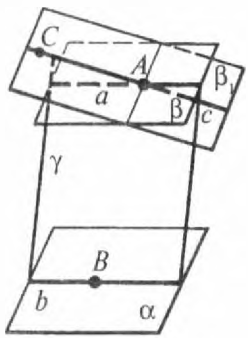
2.5- teorema. ***Tekislikdan tashqaridagi nuqta orqali berilgan tekislikka parallel qilib bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkin.***

Isboti. Berilgan α tekislikda kesishadigan qandaydir ikkita a, b chiziqni o‘tkazamiz (54- rasm). Berilgan A nuqtadan ularga parallel a_1, b_1 to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. a_1, b_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tadigan β tekislik 2.4- teoremaga ko‘ra α tekislikka parallel.

A nuqtadan α tekislikka parallel boshqa β_1 tekislik o‘tadi deb faraz qilaylik (55- rasm). β_1 tekislikda β tekislikda yotmaydigan birorta C nuqtani belgilaymiz. A, C nuqtalardan va α tekislikdagi biror B nuqta orqali γ tekislik o‘tkazamiz. Bu tekislik α, β va β_1 tekisliklarni b, a va c to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesib o‘tadi. a va c to‘g‘ri chiziqlar b to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tmaydi, chunki α tekislikni kesib o‘tmaydi. Binobarin, ular b to‘g‘ri chiziqqa parallel. Biroq γ tekislikda A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqqa parallel faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tishi mumkin. Biz ziddiyatga uchradik. Teorema to‘la isbotlandi.



54- rasm.



55- rasm.

M a s a l a (13). α va β tekisliklar γ tekislikka parallel. α va β tekisliklar kesishishi mumkinmi?

Y e c h i l i s h i . α, β tekisliklar kesishishi mumkin emas. Agar α va β tekisliklar umumiy nuqtaga ega bo'lganda edi, u holda bu nuqta orqali γ tekislikka parallel ikkita (α va β) tekislik o'tgan bo'lar edi. Bu esa 2.5- teoremaga zid.

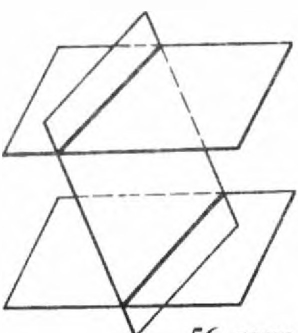
12. Parallel tekisliklarning xossalari

Agar ikkita parallel tekislik uchinchi tekislik bilan kesishsa, u holda kesishish to'g'ri chiziqlari parallel bo'ladi (56- rasm).

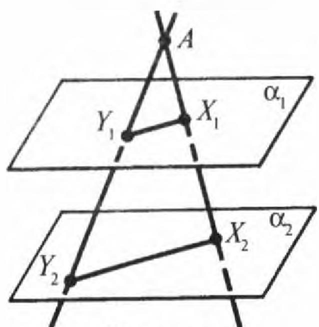
Haqiqatan, ta'rifga ko'ra parallel to'g'ri chiziqlar —bu bitta tekislikda yotuvchi va kesishmaydigan to'g'ri chiziqlardir. Aytilgan to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda — kesuvchi tekislikda yotadi. Ular kesishmaydi, chunki ularni o'z ichiga olgan parallel tekisliklar kesishmaydi. Demak, to'g'ri chiziqlar parallel. Teorema isbotlandi.

M a s a l a (19). Ikkita parallel tekislik α_1 va α_2 hamda bu tekisliklarning birortasida ham yotmaydigan A nuqta berilgan. A nuqta orqali ixtiyoriy to'g'ri chiziq o'tkazilgan. X_1 va X_2 — to'g'ri chiziqning α_1, α_2 tekisliklar bilan kesishgan nuqtalari bo'lsin. AX_1 va AX_2 kesmalar uzunliklarining $AX_1 : AX_2$ nisbati olingan to'g'ri chiziqqa bog'liq emasligini isbotlang.

Y e c h i l i s h i . A nuqta orqali boshqa to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning α_1 hamda α_2 tekisliklar

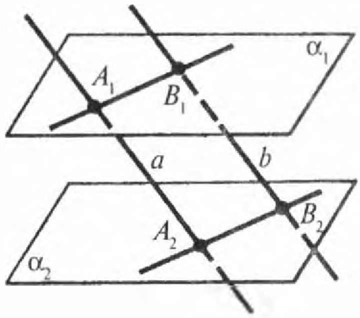


56- rasm.



57- rasm.

bilan kesishgan nuqtalarini Y_1, Y_2 bilan belgilaymiz (57- rasm). AX_1 va AY_1 to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik α_1, α_2 tekisliklarni X_1Y_1 hamda X_2Y_2 parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Bundan AX_1Y_1 va AX_2Y_2 uchburchaklar o'xshash degan xulosa chiqadi. Uchburchaklarning o'xshashligidan esa



58- rasm.

$$\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{AY_1}{AY_2}$$

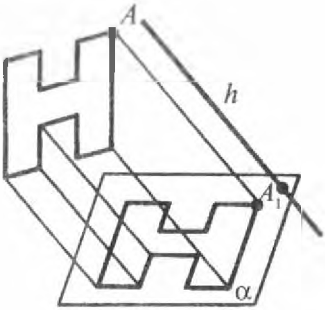
proporsiya kelib chiqadi, ya'ni $AX_1 : AX_2$ va $AY_1 : AY_2$ nisbatlar ikkala to'g'ri chiziq uchun bir xil.

Ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan parallel to'g'ri chiziqlarning kesmalari teng.

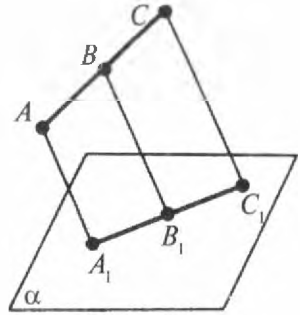
Haqiqatan, α_1 va α_2 — parallel tekisliklar, a va b — ularni kesib o'tuvchi parallel to'g'ri chiziqlar, A_1, A_2 va B_1, B_2 — to'g'ri chiziqlarning tekisliklar bilan kesishish nuqtalari bo'lsin (58- rasm). a va b to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik α_1 va α_2 tekisliklarni A_1B_1 va A_2B_2 parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tadi. $A_1B_1B_2A_2$ to'rtburchak — parallelogramm, chunki uning qarama-qarshi yotgan tomonlari parallel. Parallelogrammning qarama-qarshi yotgan tomonlari esa teng. Demak, $A_1A_2 = B_1B_2$. Teorema isbotlandi.

13. Fazoviy shakllarning tekislikda tasvirlanishi

Fazoviy shakllarni tekislikda tasvirlash uchun odatda parallel proyeksiyalashdan foydalaniladi. Shaklni tasvirlashning bu usuli quyidagichadir. Chizma tekisligi α ni kesib o'tuvchi ixtiyoriy h to'g'ri chiziqni olamiz va



59- rasm.



60- rasm.

shaklning ixtiyoriy A nuqtasidan h ga parallel qilib to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. Bu to‘g‘ri chiziqning chizma tekisligi bilan kesishgan A_1 nuqtasi A nuqtaning tasviri bo‘ladi (59-rasm). Shaklning har bir nuqtasining tasvirini shu tarzda yasab, shu shaklning tasvirini hosil qilamiz. Fazoviy shaklni tekislikda tasvirlashning bunday usuli shaklga uzoqdan qaraganda namoyon bo‘lgan tasvirga mos keladi.

Shaklni yasashning yuqorida keltirilgan bayonidan uni tekislikda tasvirlashning ba’zi xossalarini aytib o‘tamiz.

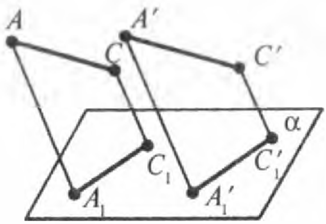
Shaklning to‘g‘ri chiziqli kesmalari chizma tekisligida yana kesma bilan tasvirlanadi (60- rasm).

Haqiqatan, AC kesma nuqtalarini proyeksiyalovchi hamma to‘g‘ri chiziqlar chizma tekisligi α ni A_1C_1 to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesuvchi bitta tekislikda yotadi. AC kesmaning ixtiyoriy B nuqtasi A_1C_1 kesmaning B_1 nuqtasi bilan tasvirlanadi.

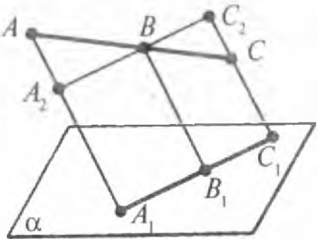
Eslatma. Hozirgi isbotlangan xossada va bundan keyin ham proyeksiyalovchi kesmalar proyeksiyalash yo‘nalishiga parallel emasligi ko‘zda tutiladi.

Shaklning parallel kesmalari chizma tekisligida parallel kesmalar bilan tasvirlanadi (61- rasm).

Haqiqatan, AC va $A'C'$ — shaklning parallel kesmalari bo‘lsin. A_1C_1 va $A_1'C_1'$ to‘g‘ri chiziqlar parallel, chunki ular parallel tekisliklarning α tekislik bilan kesishishidan hosil qilinadi. Bu tekisliklardan birinchisi AC va AA_1 to‘g‘ri chiziqlar orqali, ikkinchisi esa $A'C'$ va $A'A'_1$ tog’ri chiziqlar orqali o‘tadi.



61- rasm.



62- rasm.

Bitta to‘g‘ri chiziq yoki parallel to‘g‘ri chiziqlar kesmalarining nisbati parallel proyeksiyalashda saqlanadi.

Masalan,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{A_1B_1}{B_1C_1} \qquad (*)$$

ekanini ko‘rsatamiz (62- rasm).

B nuqta orqali A_1C_1 ga parallel A_2C_2 to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. BAA_2 va BCC_2 uchburchaklar o‘xshash. Uchburchaklarning o‘xshashligidan hamda $A_1B_1=A_2B$ va $B_1C_1=BC_2$ tengliklardan (*) proporsiya hosil bo‘ladi.

M a s a l a (21). Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Bu uchburchak medianalarining proyeksiyalarini qanday yasash kerak?

Y e c h i l i s h i. Parallel proyeksiyalashda to‘g‘ri chiziq kesmalarining nisbati saqlanadi. Shuning uchun uchburchak tomonining o‘rtasi bu tomon proyeksiyasining o‘rtasiga proyeksiyalanadi. Demak, uchburchak medianalarining proyeksiyalari uning proyeksiyasining medianalari bo‘ladi.

Tekshirish uchun savollar

1. Fazoda qanday to‘g‘ri chiziqlar parallel deyiladi?
2. Qanday to‘g‘ri chiziqlar ayqash deyiladi?
3. Berilgan to‘g‘ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan shu to‘g‘ri chiziqqa parallel qilib bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

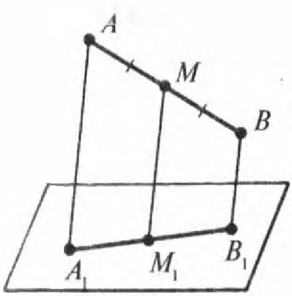
4. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik alomatini isbotlang.
5. To‘g‘ri chiziq bilan tekislik parallel deyish nimani anglatadi?
6. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning parallellik alomatini isbotlang.
7. Qanday tekisliklar parallel tekisliklar deyiladi?
8. Tekisliklarning parallellik alomatlarini isbotlang.
9. Berilgan tekislikdan tashqaridagi nuqtadan berilgan tekislikka parallel qilib bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang.
10. Agar ikkita parallel tekislik uchinchisi bilan kesishsa, kesishish to‘g‘ri chiziqlari parallel bo‘lishini isbotlang.
11. Ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan parallel to‘g‘ri chiziqlar kesmalarining tengligini isbotlang.
12. Parallel proyeksiyalash xossalarini sanab o‘ting.

MASALALAR

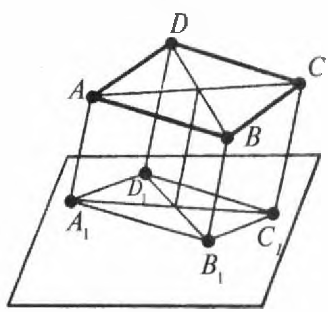
1. Agar AB va CD to‘g‘ri chiziqlar ayqash bo‘lsa, AC va BD to‘g‘ri chiziqlar ham ayqash bo‘lishini isbotlang.

2. Berilgan ikki parallel to‘g‘ri chiziqni kesib o‘tuvchi hamma to‘g‘ri chiziqlarning bir tekislikda yotishini isbotlang.

3. AB kesmaning oxirlaridan va uning M o‘rtasidan biror tekislikni A_1, B_1, M_1 nuqtalarda kesuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Agar AB kesma tekislikni kesib o‘tmasa va: 1) $AA_1 = 5$ m, $BB_1 = 7$ m; 2) $AA_1 = 3{,}6$ dm, $BB_1 = 4{,}8$ dm; 3) $AA_1 = 8{,}3$ sm, $BB_1 = 4{,}1$ sm; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ bo‘lsa, MM_1 kesmaning uzunligini toping (63- rasm).



63- rasm.



64- rasm.

4*. Oldingi masalani AB kesma tekislikni kesib o'tgan hol uchun yeching.

5*. $ABCD$ parallelogramm va uni kesmaydigan tekislik berilgan. Parallelogrammning uchlaridan berilgan tekislikni A_1, B_1, C_1, D_1 nuqtalarda kesib o'tuvchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan (64- rasm). DD_1 kesmaning uzunligini toping, bunda: 1) $AA_1 = 2$ m, $BB_1 = 3$ m, $CC_1 = 8$ m; 2) $AA_1 = 4$ m, $BB_1 = 3$ m, $CC_1 = 1$ m; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.

6. Fazoviy to'rtburchak tomonlarining o'rtalari parallelogrammning uchlari bo'lishini isbotlang (fazoviy to'rtburchakning uchlari bitta tekislikda yotmaydi).

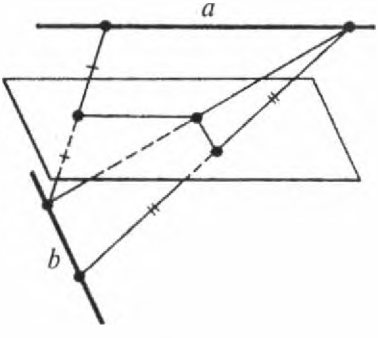
7*. Bitta tekislikda yotmaydigan to'rtta A, B, C, D nuqta berilgan. AB va CD, AC va BD, AD va BC kesmalarning o'rtalarini tutashtiruvchi to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtada kesishishini isbotlang.

8. Berilgan nuqtadan berilgan ikkita kesishuvchi tekislikning har biriga parallel to'g'ri chiziq o'tkazing.

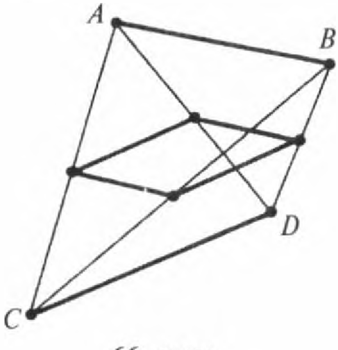
9. Agar tekislik ikki parallel to'g'ri chiziqdan birini kesib o'tsa, u ikkinchisini ham kesib o'tishini isbotlang.

10. Ikki ayqash to'g'ri chiziq orqali parallel tekisliklar o'tkazish mumkinligini isbotlang.

11*. Oxirlari ikkita ayqash to'g'ri chiziqda yotgan kesmalar o'rtalarining geometrik o'rni shu to'g'ri chiziqlarga parallel tekislik bo'lishini isbotlang (65- rasm).



65- rasm.



66- rasm.

12. Bitta tekislikda yotmaydigan to‘rtta nuqta A, B, C, D berilgan. AB va CD to‘g‘ri chiziqlarga parallel bo‘lgan har qanday tekislik AC, AD, BD, BC to‘g‘ri chiziqlarni parallelogramm uchlarida kesib o‘tishini isbotlang (66- rasm).

13. α va β tekisliklar γ tekislikka parallel α va β tekisliklar kesishishi mumkinmi?

14. Berilgan nuqtadan o‘tib, berilgan tekislikka parallel bo‘lgan hamda to‘g‘ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

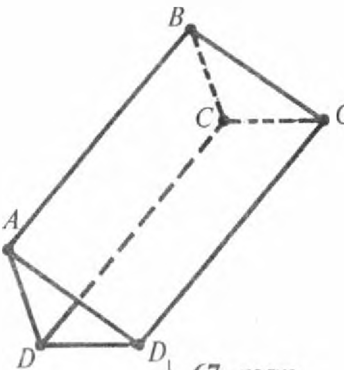
15. $ABCD$ va ABC_1D_1 parallelogrammlar turli tekisliklarda yotadi. CDD_1C_1 to‘rtburchak ham parallelogramm ekanini isbotlang (67- rasm).

16. Ikkita parallel tekislikning birida yotuvchi ABC uchburchakning uchlaridan ikkinchi tekislikni A_1, B_1, C_1 nuqtalarda kesib o‘tuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning tengligini ko‘rsating.

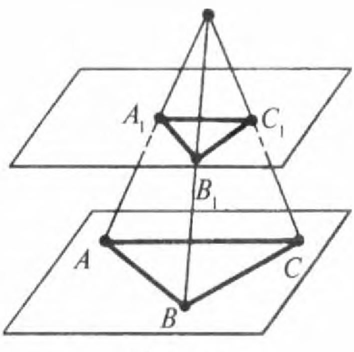
17. Bir nuqta orqali o‘tuvchi uchta to‘g‘ri chiziq berilgan tekislikni A, B, C nuqtalarda kesib o‘tadi, unga parallel tekislikni esa A_1, B_1 C_1 nuqtalarda kesib o‘tadi. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklarning o‘xshashligini isbotlang (68- rasm).

18. Ikkita parallel tekislik berilgan. Bu tekisliklarning biridagi A va B nuqtalardan ikkinchi tekislikni A_1 va B_1 nuqtalarda kesib o‘tuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Agar $AB = a$ bo‘lsa, A_1B_1 kesma nimaga teng?

19*. Ikkita parallel tekislik α_1 va α_2 hamda bu tekisliklarning birortasida ham yotmaydigan A nuqta



67- rasm.



68- rasm.

berilgan. A nuqta orqali ixtiyoriy to'g'ri chiziq o'tkazilgan. X_1 va X_2 — to'g'ri chiziqning α_1, α_2 tekisliklar bilan kesishgan nuqtalari bo'lsin. AX_1 va AX_2 kesmalar uzunliklarining $AX_1 : AX_2$ nisbati olingan to'g'ri chiziqqa bog'liq emasligini isbotlang.

20*. Uchta parallel tekislik berilgan: α_1, α_2, α_3. X_1, X_2, X_3 — bu tekisliklarning ixtiyoriy to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari. X_1X_2 va X_2X_3 kesmalar uzunliklarining $X_1X_2 : X_2X_3$ nisbati to'g'ri chiziq uchun bir xil ekanini isbotlang.

21. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Bu uchburchak medianalarining proyeksiyalarini qanday yasash kerak?

22. Parallelogrammni parallel proyeksiyalashda trapetsiya hosil qilinishi mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

23. Parallel proyeksiyalashda parallelogrammning proyeksiyasi kvadrat bo'lishi mumkinmi?

24. Markaziy simmetrik shaklning parallel proyeksiyasi yana markaziy simmetrik shakl bo'lishini isbotlang.

3- §. TO'G'RI CHIZIQLAR VA TEKISLIKLARNING PERPENDIKULARLIGI

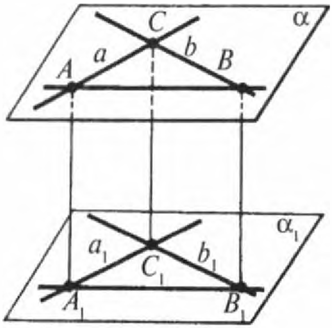
14. Fazoda chiziqlar va tekisliklarning perpendikulyarligi

Tekislikdagidek, to'g'ri burchak ostida kesishgan ikki to'g'ri chiziq *perpendikular to'g'ri chiziqlar* deyiladi.

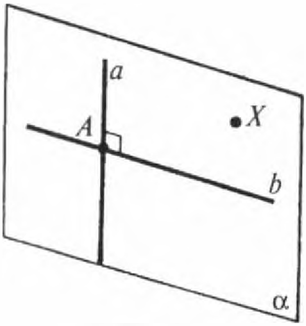
3.1 - teorema. ***Perpendikular to'g'ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo'lgan kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning o'zlari ham perpendikulardir.***

Isboti. a va b — perpendikular to'g'ri chiziqlar, a_1 va b_1 — ularga parallel bo'lgan kesishuvchi to'g'ri chiziqlar bo'lsin. a_1 va b_1 to'g'ri chiziqlarning perpendikular ekanini isbotlaymiz.

Agar a, b, a_1, b_1 to'g'ri chiziqlar bir tekislikda yotsa, planimetriyadan ma'lumki, ular teoremada ko'rsatilgan xossaga ega bo'ladilar.



69- rasm.



70- rasm.

Faraz qilaylik, berilgan to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotmasin. U holda a va b to'g'ri chiziqlar biror α tekislikda, a_1 va b_1 to'g'ri chiziqlar esa biror α_1 tekislikda yotadi (69-rasm). 2.4- teoremaga ko'ra α, α_1 tekisliklar parallel. C nuqta a va b to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi, C_1 nuqta esa a_1 va b_1 to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'lsin. a va a_1 parallel to'g'ri chiziqlar tekisligida CC_1 to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. U a va a_1 to'g'ri chiziqlarni A, A_1 nuqtalarda kesib o'tadi. b, b_1 to'g'ri chiziqlar tekisligida CC_1 to'g'ri chiziqqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz va uning b va b_1 to'g'ri chiziqlar bilan kesishish nuqtalarini B va B_1 bilan belgilaymiz.

CAA_1C_1 va CBB_1C_1 to'rtburchaklar parallelogrammlardir, chunki ularning qarama-qarshi tomonlari parallel. ABB_1A_1 to'rtburchak ham parallelogramm. Uning AA_1, BB_1 tomonlari parallel, chunki ularning har biri CC_1 to'g'ri chiziqqa parallel. Shunday qilib, bu to'rtburchak AA_1 va BB_1 parallel to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi tekislikda yotadi. Tekislik esa α va α_1 parallel tekisliklarni AB va A_1B_1 parallel to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tadi.

Parallelogrammning qarama-qarshi tomonlari teng bo'lgani uchun $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar teng. Demak, ACB burchakka teng bo'lgan $A_1C_1B_1$ burchak to'g'ri burchakdir, ya'ni a_1, b_1 to'g'ri chiziqlar perpendikular. Teorema isbotlandi.

Masala (1). Fazodagi to‘g‘ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

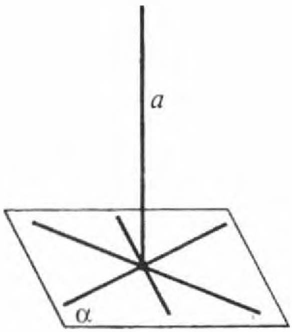
Isboti. a — berilgan to‘g‘ri chiziq va A — bu to‘g‘ri chiziqdagi nuqta bo‘lsin (70- rasm). a to‘g‘ri chiziqdan tashqarida istalgan X nuqtani olamiz hamda bu nuqta bilan a to‘g‘ri chiziq orqali α tekislik o‘tkazamiz (1.1- teorema). α tekislikda A nuqta orqali to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan b to‘g‘ri chiziqni o‘tkazish mumkin. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

15. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning perpendikulyarlik alomati

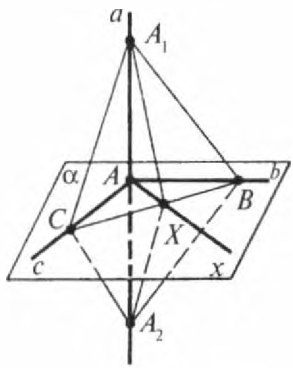
Agar tekislikni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tekislikdagi shu kesishish nuqtasidan o‘tuvchi istalgan to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsa, to‘g‘ri chiziq shu tekislikka *perpendikular* deyiladi (71- rasm).

3.2- teorema. ***Agar to‘g‘ri chiziq tekislikdagi kesishuvchi ikkita to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsa, bu to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikular bo‘ladi.***

Isboti. a to‘g‘ri chiziq α tekislikdagi b va c to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular bo‘lsin. U holda a to‘g‘ri chiziq b va c to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi A orqali o‘tadi (72- rasm). a to‘g‘ri chiziq α tekislikka perpendikular ekanini isbotlaymiz.



71- rasm.



72- rasm.

α tekislikda A nuqta orqali ixtiyoriy x to'g'ri chiziqni o'tkazamiz va uning a to'g'ri chiziqqa perpendikular ekanini ko'rsatamiz. α tekislikda A nuqtadan o'tmaydigan hamda b, c va x to'g'ri chiziqlarni kesib o'tuvchi ixtiyoriy to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Kesishish nuqtalari B, C va X bo'lsin.

a to'g'ri chiziqda A nuqtadan turli tomonda AA_1 va AA_2 teng kesmalar ajratamiz. A_1CA_2 uchburchak teng yonli, chunki AC kesma teoremaning shartiga ko'ra balandlik bo'ladi va yasashga ko'ra ($AA_1 = AA_2$)mediana bo'ladi. Shunga o'xshash A_1BA_2 uchburchak ham teng yonli. Demak, uchburchaklar tengligining uchinchi alomatiga ko'ra A_1BC va A_2BC uchburchaklar teng.

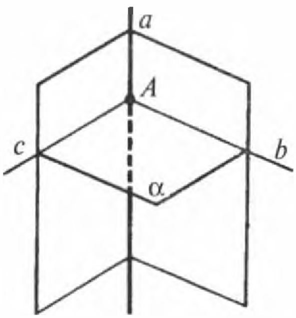
A_1BC va A_2BC uchburchaklarning tengligidan A_1BX va A_2BX burchaklarining tengligi va, demak, uchburchaklar tengligining birinchi alomatiga ko'ra A_1BX va A_2BX uchburchaklarning tengligi kelib chiqadi. Bu uchburchaklarning A_1X va A_2X tomonlarining tengligidan A_1XA_2 uchburchak teng yonli ekan degan xulosa chiqaramiz. Shuning uchun uning XA medianasi bir vaqtda balandlik ham bo'ladi. Bu esa x to'g'ri chiziq a ga perpendikular demakdir. Ta'rifga ko'ra a to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular. Teorema isbotlandi.

16. Perpendikular to'g'ri chiziq va tekislik yasash

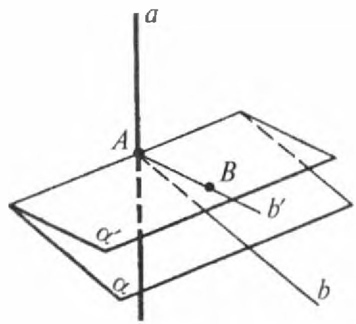
M a s a l a (6). To'g'ri chiziqda berilgan nuqta orqali unga perpendikular bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Y e c h i l i s h i. a — berilgan to'g'ri chiziq va A — undagi nuqta bo'lsin (73- rasm). Bu to'g'ri chiziq orqali ikkita tekislik o'tkazamiz va ularda A nuqta orqali a to'g'ri chiziqqa perpendikular b va c to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi α tekislik 3.2- teoremaga ko'ra a to'g'ri chiziqqa perpendikular.

Bu tekislikning yagona ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, α tekislikdan tashqari A nuqtadan o'tuvchi va a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan boshqa α'



73- rasm.

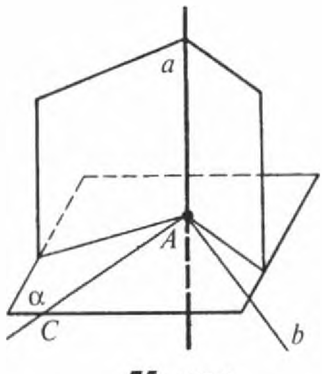


74- rasm.

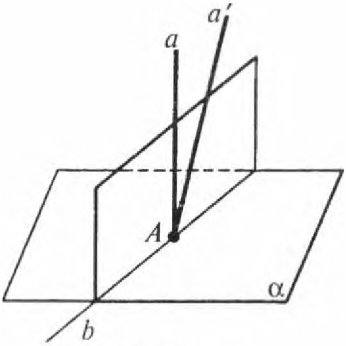
tekislik mavjud bo'lsin (74- rasm). B nuqta α' tekislikning α tekislikda yotmagan nuqtasi bo'lsin. B nuqta va a to'g'ri chiziq orqali tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik α va α' tekisliklarni a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan turli b va b' to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi. Bilamizki, bunday bo'lishi mumkin emas, chunki tekislikda to'g'ri chiziqning berilgan nuqtasidan unga perpendikular faqat bitta to'g'ri chiziq o'tadi. Shunday qilib, A nuqtadan o'tib, a to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan tekislik yagona ekan.

M a s a l a (7). Tekislikda berilgan nuqta orqali unga perpendikular bitta va faqat bitta to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

Y e c h i l i s h i. α — berilgan tekislik va A — undagi nuqta bo'lsin (75- rasm). α tekislikda A nuqta orqali b va c to'g'ri chiziqlarni o'tkazamiz. A nuqta orqali ularga perpendikular tekisliklar o'tkazamiz. Ular b va c to'g'ri chiziqlarga perpendikular biror a to'g'ri chiziq bo'yicha



75- rasm.



76- rasm.

kesishadi. Binobarin, a to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular.

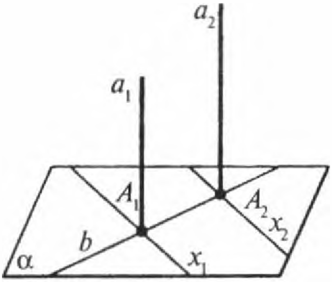
Bu to'g'ri chiziq yagona ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, a to'g'ri chiziqdan boshqa A nuqtadan o'tuvchi va α tekislikka perpendikular bo'lgan a' to'g'ri chiziq mavjud bo'lsin (76- rasm). a va a' to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik α tekislikni a va a' to'g'ri chiziqlarga perpendikular biror b to'g'ri chiziq bo'yicha kesib o'tadi. Bilamizki, bunday bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib, tekislikda berilgan nuqtadan o'tuvchi va bu tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziq yagona ekan.

17. Perpendikular to'g'ri chiziq va tekislikning xossalari

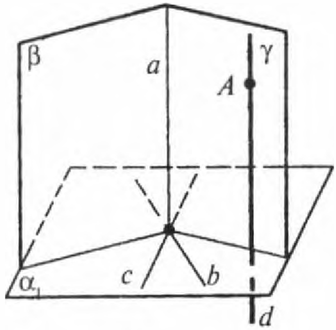
3.3-teorema. ***Agar tekislik ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikular bo'lsa, u holda ikkinchisiga ham perpendikulardir.***

Isboti. a_1 va a_2 — ikkita parallel to'g'ri chiziq, α esa a_1 to'g'ri chiziqqa perpendikular tekislik bo'lsin (77- rasm). Bu tekislikning a_2 to'g'ri chiziqqa ham perpendikular ekanini isbotlaymiz.

a_2 to'g'ri chiziq bilan α tekislik kesishgan A_2 nuqtadan α tekislikda ixtiyoriy x_2 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. α tekislikda a_1 to'g'ri chiziq bilan α tekislik kesishgan A_1 nuqta orqali x_2 to'g'ri chiziqqa parallel x_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. a_1 to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular bo'lgani uchun a_1 va x_1 to'g'ri chiziqlar perpendikular bo'ladi. 3.1-teoremaga ko'ra ularga parallel bo'lgan kesishuvchi a_2 va x_2 to'g'ri chiziqlar ham perpendikular. Shunday qilib, a_2 to'g'ri chiziq α tekislikdagi istalgan x_2 to'g'ri chiziqqa perpendikular. Bu esa a_2 to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular demakdir. Teorema isbotlandi.



77- rasm.



78- rasm.

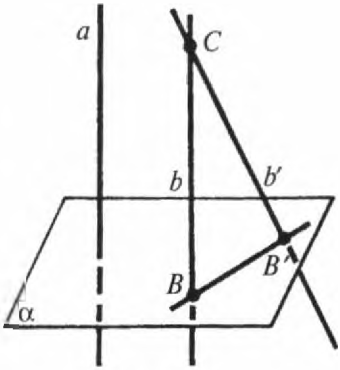
M a s a l a (8). Istalgan A nuqta orqali berilgan α tekislikka perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

Y e c h i l i s h i. α tekislikda kesishuvchi ikkita b va c to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (78- rasm). Ularning kesishish nuqtasidan mos ravishda b va c to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular bo‘lgan β va γ tekisliklarni o‘tkazamiz. Bu tekisliklar biror a to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi. a to‘g‘ri chiziq b va c to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular, va demak, α tekislikka ham perpendikular. Endi A nuqta orqali a ga parallel d to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. 3.3- teoremaga ko‘ra u α tekislikka perpendikular.

3.4- t e o r e m a. ***Bitta tekislikka perpendikular ikki to‘g‘ri chiziq o‘zaro paralleldir.***

I s b o t i. a va b to‘g‘ri chiziqlar α tekislikka perpendikular bo‘lsin (79- rasm). Faraz qilaylik, a va b to‘g‘ri chiziqlar parallel emas.

b to‘g‘ri chiziqda α tekislikka tegishli bo‘lmagan birorta C nuqtani tanlab olamiz. C nuqta orqali a to‘g‘ri chiziqqa



79- rasm.

parallel qilib b' to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. b' to‘g‘ri chiziq α tekislikka perpendikular (3.3- teorema). B va B' nuqtalar b va b' to‘g‘ri chiziqlarning α tekislik bilan kesishish nuqtalari bo‘lsin. U holda BB' to‘g‘ri chiziq kesishuvchi b va b' to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular. Bunday bo‘lishi mumkin emas. Biz qarama-qarshilikka duch keldik. Teorema isbotlandi.

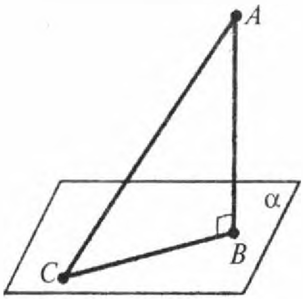
18. Perpendikular va og‘ma

Tekislik va unda yotmaydigan nuqta berilgan bo‘lsin.

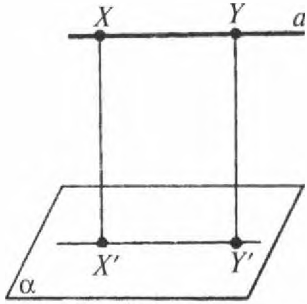
Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka tushirilgan *perpendikular* deb berilgan nuqtani tekislikning nuqtasi bilan tutashtiruvchi va tekislikka perpendikular to‘g‘ri chiziqda yotuvchi kesmaga aytiladi. Bu kesmaning tekislikda yotgan oxiri *perpendikularning asosi* deyiladi. Nuqtadan tekislikkacha *masofa* deb shu nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligiga aytiladi.

Berilgan nuqtadan berilgan tekislikka o‘tkazilgan *og‘ma* deb berilgan nuqtani tekislikdagi nuqta bilan tutashtiruvchi va tekislikka perpendikular bo‘lmagan istalgan kesmaga aytiladi. Kesmaning tekislikda yotgan oxiri *og‘maning asosi* deyiladi. Bitta nuqtadan o‘tkazilgan perpendikular va og‘maning asoslarini tutashtiruvchi kesma *og‘maning proyeksiyasi* deyiladi.

80- rasmda A nuqtadan α tekislikka AB perpendikular va AC og‘ma o‘tkazilgan. B nuqta perpendikularning asosi, C nuqta og‘maning asosi, BC esa AC og‘maning α tekislikdagi proyeksiyasi.



80- rasm.



81- rasm.

M a s a l a (16). Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lsa, uning hamma nuqtalari tekislikdan bir xil masofada turishini isbotlang.

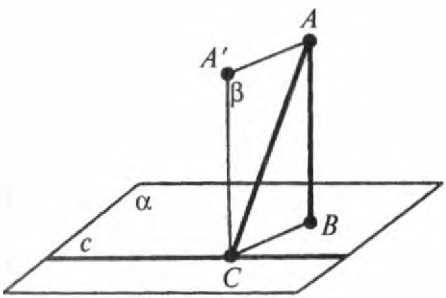
Y e c h i l i s h i . a — berilgan to‘g‘ri chiziq va α — berilgan tekislik bo‘lsin (81- rasm). a to‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy ikkita X va Y nuqta olamiz. Ulardan α tekislikkacha masofalar shu tekislikka tushirilgan XX' va YY' perpendikularlarning uzunliklaridir. 3.4- teoremaga ko‘ra XX' va YY' to‘g‘ri chiziqlar parallel, demak, ular bitta tekislikda yotadi. Bu tekislik α tekislikni $X'Y'$ to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesib o‘tadi. a to‘g‘ri chiziq $X'Y'$ to‘g‘ri chiziqqa parallel, chunki $X'Y'$ to‘g‘ri chiziqni o‘z ichiga olgan tekislikni kesib o‘tmaydi. Shunday qilib, $XX'Y'Y$ to‘rtburchakning qarama-qarshi yotgan tomonlari parallel. Demak, u parallelogramm, bundan $XX' = YY'$.

To‘g‘ri chiziqdan unga parallel tekislikkacha bo‘lgan *masofa* deb shu to‘g‘ri chiziqning istalgan nuqtasidan tekislikkacha bo‘lgan masofaga aytiladi.

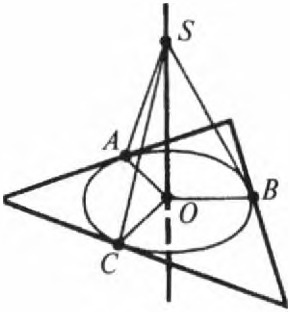
19. Uch perpendikulyar haqidagi teorema

3.5- t e o r e m a . ***Tekislikda og‘maning asosidan uning proyeksiyasiga perpendikular qilib o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq og‘maning o‘ziga ham perpendikular. Aksincha, tekislikdagi to‘g‘ri chiziq og‘maga perpendikular bo‘lsa, u og‘maning proyeksiyasiga ham perpendikular bo‘ladi.***

I s b o t i . AB kesma α tekislikka tushirilgan perpendikular, AC — og‘ma va c esa og‘maning C asosidan α tekislikka o‘tkazilgan to‘g‘ri chiziq bo‘lsin (82- rasm). AB to‘g‘ri chiziqqa parallel CA' to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. U α tekislikka perpendikular. AB va $A'C$ to‘g‘ri chiziqlar orqali β tekislikni o‘tkazamiz. c to‘g‘ri chiziq CA' to‘g‘ri chiziqqa perpendikular. Agar u CB to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lsa, u holda u β tekislikka ham perpendikular bo‘ladi, demak, AC to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikulardir.



82- rasm.



83- rasm.

Xuddi shunga o‘xshash, agar c to‘g‘ri chiziq CA og‘maga perpendikular bo‘lsa, u CA' to‘g‘ri chiziqqa ham perpendikular ekanligidan β tekislikka perpendikular bo‘ladi, demak, BC og‘maning proyeksiyasiga ham perpendikular bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

M a s a l a (23). Uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazidan uchburchak tekisligiga perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchak tomonlaridan baravar uzoqlikda turishini isbotlang.

Y e c h i l i s h i . A, B, C — uchburchak tomonlarining aylanaga urinish nuqtalari, O — aylananing markazi va S — perpendikulardagi nuqta bo‘lsin (83- rasm). OA radius uchburchakning tomoniga perpendikular bo‘lgani uchun uch perpendikular haqidagi teoremaga ko‘ra SA kesma shu tomonga tushirilgan perpendikulardir, uning uzunligi esa S nuqtadan uchburchakning tomonigacha bo‘lgan masofadir. Pifagor teoremasiga ko‘ra, $SA=\sqrt{AO^2+OS^2}=\sqrt{r^2+OS^2}$, bunda r — ichki chizilgan aylananing radiusi. Shunga o‘xshash quyidagilarni topamiz: $SB=\sqrt{r^2+OC^2}$, $SC=$ $=\sqrt{r^2+OS^2}$, ya’ni S nuqtadan uchburchak tomonlarigacha hamma masofalar teng.

20. Tekisliklarning perpendikulyarlik alomati

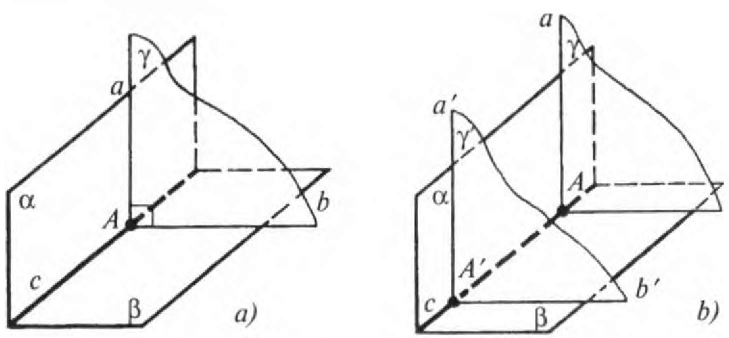
Kesishuvchi ikkita tekislikning kesishgan to'g'ri chizig'iga perpendikular bo'lgan uchinchi tekislik ularni perpendikular to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tsa, bu ikki tekislik *perpendikular tekisliklar* deyiladi.

84-*a* rasmda siz *c* to'g'ri chiziq bo'yicha kesishgan ikkita α va β perpendikular tekisliklarni ko'ryapsiz. *c* to'g'ri chiziqqa perpendikular γ tekislik α va β tekisliklarni *a* va *b* perpendikular to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tadi.

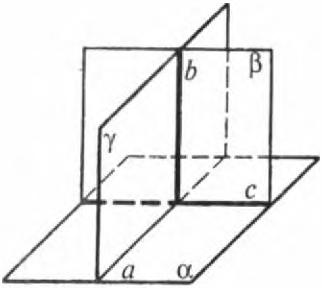
O'zaro perpendikular tekisliklarning kesishish chizig'iga perpendikular bo'lgan har qanday tekislik bu tekisliklarni perpendikular to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesadi.

Haqiqatan, agar *c* to'g'ri chiziqqa perpendikular boshqa γ' tekislik olinsa (84- *b* rasm), bu tekislik α tekislikni *c* to'g'ri chiziqqa perpendikular, demak, *a* to'g'ri chiziqqa parallel a' to'g'ri chiziq bo'yicha, β tekislikni esa *c* to'g'ri chiziqqa perpendikular, demak, *b* to'g'ri chiziqqa parallel b' to'g'ri chiziq bo'yicha kesib o'tadi. 3.1 - teoremaga asosan, *a* va *b* to'g'ri chiziqlarning perpendikularligidan a' va b' to'g'ri chiziqlar perpendikular degan xulosaga kelasiz, shuni isbotlash talab qilingan edi.

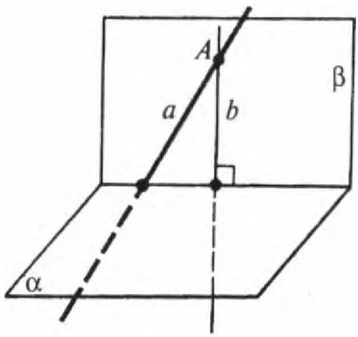
3.6 - t e o r e m a. ***Agar tekislik boshqa bir tekislikka perpendikular to'g'ri chiziq orqali o'tsa, bu tekisliklar perpendikulardir.***



84- rasm.



85- rasm.



86- rasm.

I s b o t i. α — tekislik, b — unga perpendikular to‘g‘ri chiziq va β esa b to‘g‘ri chiziq orqali o‘tuvchi tekislik, c to‘g‘ri chiziq α va β tekisliklar kesishadigan to‘g‘ri chiziq bo‘lsin (85-rasm). α va β tekisliklarning perpendikularligini isbotlaymiz.

α tekislikda b to‘g‘ri chiziqning α tekislik bilan kesishgan nuqtasi orqali c to‘g‘ri chiziqqa perpendikular a to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz, a va b to‘g‘ri chiziqlar orqali γ tekislikni o‘tkazamiz. U c to‘g‘ri chiziqqa perpendikular, chunki c to‘g‘ri chiziq a va b to‘g‘ri chiziqlarga perpendikular. a va b to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lgani uchun α va β tekisliklar ham perpendikular. Teorema isbotlandi.

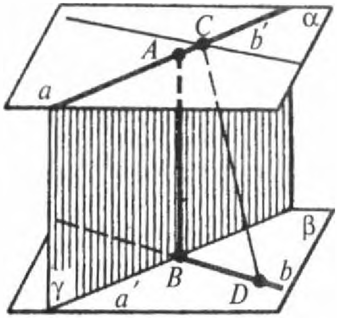
M a s a l a (33). a to‘g‘ri chiziq va α tekislik berilgan. a to‘g‘ri chiziq orqali α tekislikka perpendikular tekislik o‘tkazing.

Y e c h i l i s h i . a to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasidan (86- rasm) α tekislikka perpendikular qilib b to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz (8- masala). a va b to‘g‘ri chiziqlar orqali β tekislikni o‘tkazamiz. 3.6- teoremaga ko‘ra β tekislik α tekislikka perpendikular.

21. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa

Ikki ayqash to‘g‘ri chiziqning *umumiy perpendikulari* deb oxirlari shu to‘g‘ri chiziqlarda bo‘lib, ularning har biriga perpendikular bo‘lgan kesmaga aytiladi.

Ikki ayqash to'g'ri chiziq bitta va faqat bitta umumiy perpendikularga ega. Bu perpendikular shu to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi parallel tekisliklarning umumiy perpendikularidir.



87- rasm.

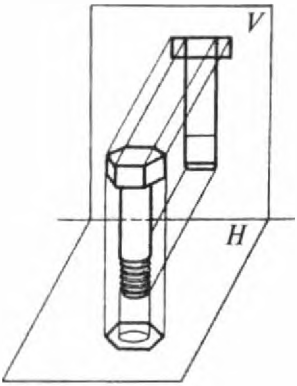
Haqiqatan, *a* va *b* berilgan ayqash to'g'ri chiziqlar bo'lsin (87-rasm). Ular orqali α, β parallel tekisliklar o'tkazamiz, *a* to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi va α tekislikka perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqlar bitta (γ) tekislikda yotadi. Bu tekislik β tekislikni *a* ga parallel bo'lgan *a′* to'g'ri chiziq bo'yicha kesib o'tadi. *B* nuqta *a′*, *b* to'g'ri chiziqlarning kesishgan nuqtasi bo'lsin. U holda α tekislikka perpendikular bo'lgan *AB* to'g'ri chiziq β tekislikka ham perpendikular bo'ladi, chunki β tekislik α ga parallel. *AB* kesma α va β tekisliklarning umumiy perpendikulari va demak, *a* va *b* to'g'ri chiziqlarning ham umumiy perpendikularidir.

Bu umumiy perpendikular yagona ekanini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, *a* va *b* to'g'ri chiziqlarning boshqa *CD* umumiy perpendikulari bor bo'lsin. *C* nuqta orqali *b* ga parallel qilib *b′* to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. *CD* to'g'ri chiziq *b* to'g'ri chiziqqa perpendikular, demak, *b′* ga ham perpendikular. U *a* to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgani uchun bu to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular, demak, *AB* to'g'ri chiziqqa parallel. Demak, *AB* va *CD* to'g'ri chiziqlarning parallelligi sababli ular orqali tekislik o'tkazish mumkin. Bu tekislikda esa *AC*, *BD* ayqash to'g'ri chiziqlar yotadi, bunday bo'lishi mumkin emas. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

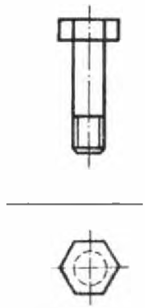
Ayqash to'g'ri chiziqlar umumiy perpendikularining uzunligi ular *orasidagi masofa* deyiladi. Bu masofa shu to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi parallel tekisliklar orasidagi masofaga teng.

22. Texnik chizmachilikda ortogonal proyeksiyalashning qo'llanilishi

Chizmachilikda ortogonal proyeksiyalash qo'llaniladi, ya'ni proyeksiya tekisligiga perpendikular to'g'ri chiziqlar bilan parallel proyeksiyalash qo'llaniladi. Mashina detallari chizmasi bitta, ikkita yoki uchta o'zaro perpendikular tekisliklarni ortogonal proyeksiyalash yo'li bilan hosil qilinadi. Bu tekisliklar proyeksiyalar tekisligi deyiladi. Proyeksiyalar tekisligi unda tasvirlangan detalning proyeksiyalari bilan ular kesishgan to'g'ri chiziq atrofida burish natijasida ustma-ust tushiriladi.



88- rasm.



89- rasm.

88-rasmda *H* gorizontal va *V* vertikal tekislikka proyeksiyalash yo'li bilan boltning chizmasini bajarish ko'rsatilgan. Boltning ikki proyeksiyadagi chizmasi 89-rasmda ko'rsatilgan.

Mashina detallari chizmasini chizishda standartda ko'zda tutilgan turli xil shartliliklardan foydalaniladi. Xususan, rezba shartli ravishda tutash ingichka chiziq bilan, markaziy va o'q chiziqlari — shtrix-punktir chiziqlar bilan tasvirlanadi. Tasvirlashning bu shartliliklari bolt chizmasida qo'llanilgan (89-rasm).

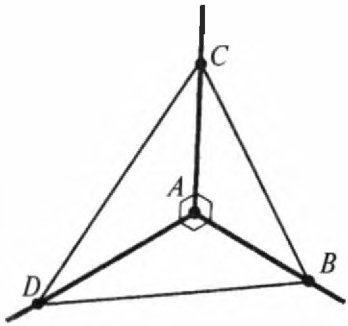
TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1. Fazodagi qanday to'g'ri chiziqlar perpendikular to'g'ri chiziqlar deyiladi?
2. Perpendikulyar to'g'ri chiziqlarga mos ravishda parallel bo'lgan kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning o'zlari perpendikular ekanini isbotlang.
3. To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikularligiga ta'rif bering.
4. To'g'ri chiziq bilan tekislikning perpendikularlik alomatini isbotlang.
5. Agar tekislik ikkita parallel to'g'ri chiziqdan biriga perpendikular bo'lsa, uning ikkinchi to'g'ri chiziqqa ham perpendikular ekanini isbotlang.
6. Bitta tekislikka perpendikular bo'lgan ikki to'g'ri chiziqning o'zaro parallel bo'lishini isbotlang.
7. Berilgan nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikular nima?
8. Nuqtadan tekislikkacha masofa nima?
9. Berilgan nuqtadan tekislikka o'tkazilgan og'ma nima? Og'maning proyeksiyasi nima?
10. Uch perpendikular haqidagi teoremani isbotlang.
11. Qanday tekisliklar perpendikular tekisliklar deyiladi?
12. Tekisliklarning perpendikularlik alomatini isbotlang.
13. Ayqash to'g'ri chiziqlarning umumiy perpendikulari nima?
14. Ayqash to'g'ri chiziqlar bitta va faqat bitta umumiy perpendikularga ega ekanini va bu umumiy perpendikularning shu to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi parallel tekisliklar uchun umumiy perpendikular ekanini isbotlang.
15. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa nima?

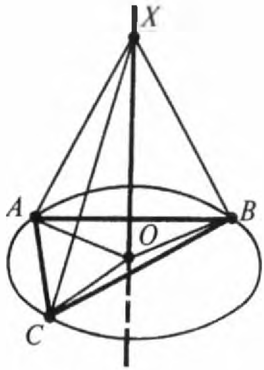
MASALALAR

1. Fazodagi to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasidan unga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

2. AB, AC va AD to'g'ri chiziqlar juft-juft perpendikular (90-rasm). CD kesmani toping, bunda 1) $AB = 3$ sm, $BC = 7$ sm, $AD = 1{,}5$ sm; 2) $BD = 9$ sm, $BC = 16$ sm, $AD = 5$ sm; 3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$; 4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.



90- rasm.



91- rasm.

3*. $ABCD$ to‘rtburchakning tomonlari va $A_1B_1\ C_1\ D_1$ to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari mos ravishda parallel. $ABCD$ —to‘g‘ri to‘rtburchak ekanini isbotlang.

4. Uchburchakka tashqi chizilgan aylana markazidan uchburchak tekisligiga perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Bu to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchakning uchlaridan baravar uzoqlikda yotishini isbotlang (91-rasm).

5. To‘g‘ri burchagi C bo‘lgan to‘g‘ri burchakli ABC uchburchakning o‘tkir burchagi uchidan uchburchak tekisligiga perpendikular AD to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. D nuqtadan B va C uchlargacha bo‘lgan masofalarni toping, bunda $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.

6. To‘g‘ri chiziqda berilgan nuqta orqali unga perpendikular bitta va faqat bitta tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

7. Tekislikda berilgan nuqta orqali unga perpendikular bitta va faqat bitta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

8. Istalgan A nuqta orqali berilgan α tekislikka perpendikular to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

9. Bir-biridan 3,4 m masofadagi ikki vertikal ustunning yuqori uchlari to‘sin bilan tutashtirilgan. Bir ustunning balandligi 5,8 m, ikkinchisiniki — 3,9 m. To‘sinning uzunligini toping.

10. 15 m uzunlikdagi telefon simi telefon ustuniga yer sirtidan 8 m balandlikda mahkamlangan va undan uyga tortilgan, bu yerda u 20 m balandlikda mahkamlangan. Sim osilib turmagan deb faraz qilib, uy bilan ustun orasidagi masofani toping.

11. α tekislikning tashqarisidagi S nuqtadan unga uchta teng SA, SB, SC og‘malar va SO perpendikular o‘tkazilgan. Perpendikulyarning O asosi ABC uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi bo‘lishini isbotlang.

12. Teng tomonli uchburchakning tomonlari 3 m ga teng. Uchburchak har bir uchidan 2 m masofada bo‘lgan nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo‘lgan masofani toping.

13. A nuqtadan kvadratning uchlarigacha masofa a ga teng. Kvadratning tomoni b ga teng bo‘lsa, A nuqtadan kvadrat tekisligigacha masofani toping.

14. Berilgan nuqtadan tekislikka o‘tkazilgan berilgan uzunlikdagi og‘malar asoslarining geometrik o‘rnini toping.

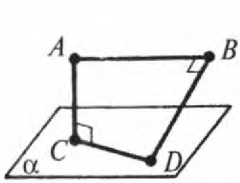
15. Nuqtadan tekislikka ikkita og‘ma o‘tkazilgan. Agar: 1) ulardan biri ikkinchisidan 26 sm uzun, og‘malarning proyeksiyalari 12 sm va 40 sm ga teng bo‘lsa; 2) og‘malar 1 : 2 ga teng nisbatda bo‘lib, ularning proyeksiyalari 1 sm va 7 sm ga teng bo‘lsa, og‘malarning uzunligini toping.

16. Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka parallel bo‘lsa, uning hamma nuqtalari tekislikdan bir xil masofada bo‘lishini isbotlang.

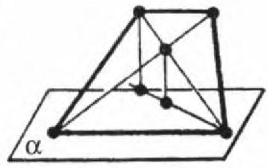
17. To‘g‘ri burchakli ABC uchburchakning C to‘g‘ri burchagi uchi orqali gipotenuzaga parallel holda va undan 1 m masofada tekislik o‘tkazilgan. Katetlarning bu tekislikdagi proyeksiyalari 3 m va 5 m ga teng. Gipotenuzani toping.

18. Tekislikka parallel bo‘lgan AB kesmaning oxirlaridan unga AC perpendikular va AB kesmaga perpendikular BD og‘ma o‘tkazildi (92-rasm). Agar $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$ bo‘lsa, CD masofa nimaga teng?

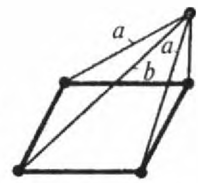
19. Tekislikning hamma nuqtalaridan unga parallel tekislikkacha masofalar bir xil bo‘lishini isbotlang.



92- rasm.



93- rasm.



94- rasm.

20. a va b uzunlikdagi ikkita kesma ohirlari ikkita parallel tekislikka tiralib turadi. Birinchi (a uzunlikdagi) kesmaning tekislikdagi proyeksiyasi c ga teng. Ikkinchi kesmaning proyeksiyasini toping.

21. Kesmaning o‘rtasidan tekislik o‘tkazilgan. Kesmaning oxirlari bu tekislikdan baravar masofada yotishini isbotlang.

22. Parallelogrammning diagonali orqali tekislik o‘tkazilgan. Ikkinchi diagonalning oxirlari bu tekislikdan baravar masofada yotishini isbotlang.

23. 1 m uzunlikdagi kesma tekislikni kesib o‘tadi, uning oxirlari tekislikdan 0,5 m va 0,3 m masofada yotadi. Kesmaning tekislikdagi proyeksiyasining uzunligini toping.

24*. Trapetsiyaning bitta asosi orqali ikkinchi asosidan a masofada yotuvchi tekislik o‘tkazilgan. Agar trapetsiyaning asoslari $m : n$ ga teng nisbatda bo‘lsa, trapetsiyaning diagonallari kesishgan nuqtadan shu tekislikkacha masofani toping (93- rasm).

25. Kvadratning uchidan uning tekisligigacha perpendikular chiqarilgan. Bu perpendikularning oxiridan kvadratning boshqa uchlarigacha masofalar a va b ga teng ($a < b$). Perpendikulyarning uzunligini va kvadratning tomonini toping (94- rasm).

26. To‘g‘ri to‘rtburchakning uchidan uning tekisligiga perpendikular chiqarilgan. Bu perpendikular oxiridan to‘g‘ri to‘rtburchakning boshqa uchlarigacha masofalar a, b, c ga teng ($a < c$, $b < c$). Perpendikulyarning uzunligini va to‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlarini toping.

27. Tekislikdan 1 m masofada yotgan nuqtadan ikkita teng og‘ma o‘tkazilgan. Agar og‘malar o‘zaro perpendikular va tekislikka o'tkazilgan perpendikular bilan 60° ga teng burchaklar tashkil etishi ma'lum bo'lsa, og'malarning asoslari orasidagi masofani toping.

28. Uchburchakka ichki chizilgan aylananing markazidan uchburchak tekisligiga perpendikular to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Bu to'g'ri chiziqning har bir nuqtasi uchburchak tomonlaridan baravar uzoqlikda turishini isbotlang.

29. Berilgan nuqtadan uchburchak tekisligigacha masofa 1,1 m ga, uchburchakning har bir tomonigacha masofa esa 6,1 m ga teng. Bu uchburchakka ichki chizilgan aylananing radiusini toping.

30. b uzunlikdagi AB kesmaning A uchi orqali kesmaga perpendikular tekislik o'tkazilgan va bu tekislikda to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Agar A nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofa a ga teng bo'lsa, B nuqtadan to'g'ri chiziqqacha masofani toping.

31*. Berilgan to'g'ri burchak tekisligidan tashqarida yotgan M nuqta burchakning uchidan a masofada, uning tomonlaridan esa b masofada yotadi. M nuqtadan burchak tekisligigacha masofani toping.

32. ABC uchburchakning C to'g'ri burchagi uchidan uchburchak tekisligiga CD perpendikular chiqarilgan. Agar $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ bo'lsa, D nuqtadan uchburchakning gipotenuzasigacha masofani toping.

33. a to'g'ri chiziq va α tekislik berilgan. a to'g'ri chiziq orqali α tekislikka perpendikular tekislik o'tkazing.

34. To'g'ri burchakli ABC uchburchakning A, B o'tkir burchaklari uchlaridan uchburchak tekisligiga AA_1, BB_1 perpendikular chiqarilgan. Agar $A_1C = 4$ m, $A_1A = 3$ m, $B_1C = 6$ m, $B_1B = 2$ m bo'lsa, va A_1B_1 kesma uchburchak tekisligini kesib o'tmasa, C uchdan A_1B_1 kesmaning o'rtasigacha masofani toping.

35. Ikki perpendikular tekislikda yotuvchi A va B nuqtalardan tekisliklar kesishgan to'g'ri chiziqqa AC va BD perpendikular tushirilgan. AB kesmaning uzunligini toping, bunda: 1) $AC = 6$ m, $BD = 7$ m,

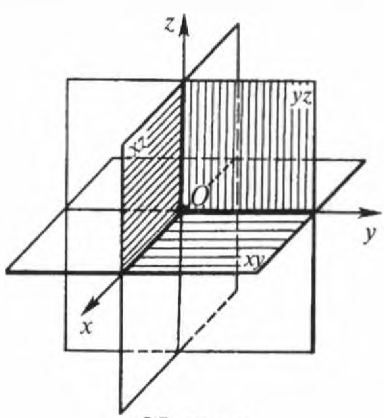
$CD=6$ m; 2) $AC=3$ m, $BD=4$ m, $CD=12$ m; 3) $AD=4$ m, $BC=7$ m, $CD=1$ m; 4) $AD=BC=5$ m, $CD=1$ m; 5) $AC=a$, $BD=b$, $CD=c$; 6) $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$.

36. α va β tekisliklar perpendikular. α tekislikda A nuqta olingan, bu nuqtadan c to‘g‘ri chiziqqacha (tekisliklarning kesishgan chizig‘igacha) masofa 0,5 m ga teng. β tekislikda c to‘g‘ri chiziqqa parallel va undan 1,2 m masofada b to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. A nuqtadan b to‘g‘ri chiziqqacha masofani toping.

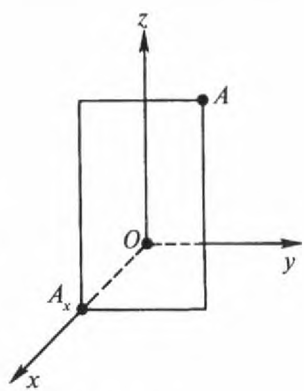
4- §. FAZODA DEKART KOORDINATALARI VA VEKTORLAR

23. Fazoda dekart koordinatAlarini kiritish

Bitta O nuqtada kesishuvchi o‘zaro perpendikular uchta x, y, z to‘g‘ri chiziqni olamiz (95-rasm). Bu to‘g‘ri chiziqlarning har bir jufti orqali tekislik o‘tkazamiz. x va y to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tuvchi tekislik xy tekislik deyiladi. Boshqa ikki tekislik, mos ravishda, xz va yz tekisliklar deyiladi. x, y, z to‘g‘ri chiziqlar *koordinata o‘qlari* deyiladi, ularning kesishgan O nuqtasi — *koordinatalar boshi*, xy, yz va xz tekisliklar



95- rasm.



96- rasm.

esa *koordinata tekisliklari* deyiladi. O nuqta koordinata o'qlarining har birini ikkita yarim to'g'ri chiziqqa — yarim o'qlarga ajratadi. Ulardan birini musbat, ikkinchisini manfiy deb aytishga shartlashib olamiz.

Endi ixtiyoriy A nuqtani olamiz va undan yz tekislikka parallel tekislik o'tkazamiz (96-rasm). Bu tekislik x o'qni biror A_x nuqtada kesib o'tadi. A nuqtaning x *koordinatasi* deb moduli OA_x kesmaning uzunligiga teng sonni aytamiz; bu son, agar A_x nuqta x ning musbat yarim o'qida yotsa — musbat va manfiy yarim o'qda yotsa — manfiy. Agar A_x nuqta O nuqta bilan ustma-ust tushsa, $x = 0$ deb olamiz. A nuqtaning y, z koordinatalari shuning singari aniqlanadi. Nuqtaning koordinatalarini nuqtaning harfiy belgilanishi yoniga qavs ichida yozamiz: $A(x; y; z)$. Ba'zan oddiygina qilib uning koordinatalari bilan belgilaymiz: $(x; y; z)$.

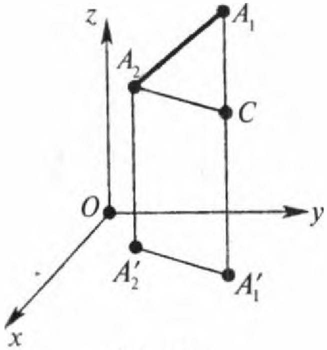
M a s a l a (2). A (1; 2; 3), B (0; 1; 2), C (0; 0; 3), D (1; 2; 0) nuqtalar berilgan. Bu nuqtalardan qaysilari: 1) xy tekislikda; 2) z o'qda; 3) yz tekislikda yotadi?

Y e c h i l i s h i. xy tekislikdagi nuqtalarda z koordinata nolga teng. Shuning uchun faqat D nuqta xy tekislikda yotadi. yz tekislikdagi nuqtalarda x koordinata nolga teng. Demak, B va C nuqtalar yz tekislikda yotar ekan. z o'qdagi nuqtalarning ikkita koordinatasi (x va y) nolga teng. Shuning uchun C nuqta z o'qda yotadi.

24. Nuqtalar orasidagi masofa

Ikkita $A_1(x_1; y_1; z_1)$ va $A_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orasidagi masofani bu nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz.

Avval A_1A_2 to'g'ri chiziq z o'qiga parallel bo'lmagan holni qaraymiz (97- rasm). A_1 va A_2 nuqtalar orqali z o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ular xy tekislikni A'_1 va A'_2 nuqtalarda kesib o'tadi. Bu nuqtalar ham A_1, A_2 nuqtalar singari x, y koordinatalarga ega, lekin ularning z koordinatasi nolga teng. Endi A_2 nuqta



97- rasm.

orqali xy tekislikka parallel tekislik o‘tkazamiz. U $A_1A'_1$ to‘g‘ri chiziqni biror C nuqtada kesib o‘tadi. Pifagor teoremasiga ko‘ra

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2$$

CA_2 va $A_1'A_2'$ kesmalar teng va

$$A_1'A_2'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

A_1C kesmaning uzunligi $|z_1 - z_2|$ ga teng. Shuning uchun

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Agar A_1A_2 kesma z o‘qiga parallel bo‘lsa: $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Hosil qilingan formula ham shu natijani beradi, chunki bu holda $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Shunday qilib, ***A_1 va A_2 nuqtalar orasidagi masofa ushbu formula bo‘yicha hisoblanadi:***

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

M a s a l a (5). xy tekislikda $A\ (0;\ 1;\ -1)$, $B\ (-1;\ 0;\ 1)$, $C\ (0;\ -1;\ 0)$ nuqtalardan baravar uzoqlashgan $D\ (x;\ y;\ 0)$ nuqtani toping.

Y e c h i l i s h i. Ushbuga egamiz:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2,$$
$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2,$$
$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

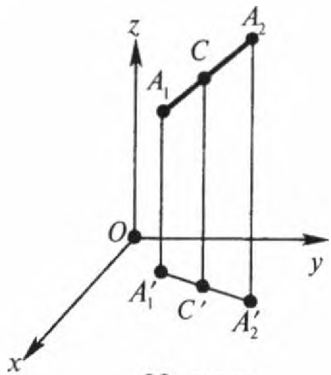
Oldingi ikkita masofani uchinchisiga tenglab, x, y ni aniqlash uchun ikkita tenglama hosil qilamiz:

$$-4y + 1 = 0;\ \ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Bundan $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Izlanayotgan nuqta $D\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4}, 0\right)$.

25. Kesma o'rtasining koordinatalari

$A_1(x_1; y_1; z_1)$ va $A_2(x_2; y_2; z_2)$ — ikkita ixtiyoriy nuqta bo'lsin. A_1A_2 kesmaning o'rtasi C nuqtaning x, y, z koordinatalarini uning A_1 va A_2 uchlari koordinatalari orqali ifodalaymiz (98- rasm). Buning uchun A_1, A_2 va C nuqtalar orqali z o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Ular xy tekislikni $A_1'(x_1; y_1; 0)$, $A_2'(x_2; y_2; 0)$ va C' $(x; y; 0)$ nuqtalarda kesib o'tadi. Fales teoremasiga ko'ra C' nuqta $A_1'A_2'$ kesmaning o'rtasi bo'ladi. Biz esa xy tekislikda kesma o'rtasining koordinatalari uning uchlarining koordinatalari orqali



98- rasm.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

formula bilan ifodalanishini bilamiz. z uchun ifoda topishda xy tekislik o'rniga xz yoki yz tekislikni olish kifoya. Bunda z uchun o'xshash formula hosil qilinadi:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Masala (6). Uchlari A (1; 3; 2), B (0; 2; 4), C (1; 1; 4), D (2; 2; 2) nuqtalarda bo'lgan $ABCD$ to'rtburchakning parallelogramm ekanini isbotlang.

Yechilishi. Biz diagonallari kesishib, kesishish nuqtasida diagonallari teng ikkiga bo'linadigan to'rtburchakning parallelogrammligini bilamiz. Bundan masalani yechishda foydalanamiz. AC kesma o'rtasining koordinatalari:

$$x=\frac{1+1}{2}=1,\quad y=\frac{3+1}{2}=2,\quad z=\frac{2+4}{2}=3.$$

BD kesma o'rtasining koordinatalari:

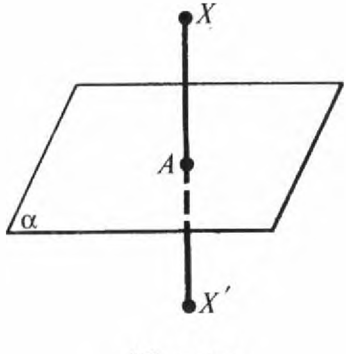
$$x=\frac{0+2}{2}=1,\quad y=\frac{2+2}{2}=2,\quad z=\frac{4+2}{2}=3.$$

AC va *BD* kesmalar o'rtalarining koordinatalari bir xil ekanini ko'ramiz. Demak, kesmalar kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi. Demak, *ABCD* to'rtburchak —parallelogramm.

26. Fazoda simmetrik almashtirish

Fazoda shakllar uchun almashtirish tushunchasi xuddi tekislikdagi singari ta'riflanadi. Xuddi tekislikdagi kabi nuqta va to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik almashtirishlar ta'riflanadi.

Fazoda nuqta va to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetriyadan tashqari tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish ham qaraladi. Bu almashtirish quyidagidan iborat (99- rasm). α— ixtiyoriy tayinlangan tekislik bo'lsin. Shaklning *X* nuqtasidan α tekislikka *XA* perpendikular tushiramiz va uning *A* nuqtasi davomida



99- rasm.

XA kesmaga teng AX' kesmani qo'yamiz. X' *nuqta* α *tekislikka nisbatan* X *nuqtaga simmetrik nuqta deyiladi,* X nuqtani unga simmetrik X' nuqtaga o'tkazuvchi almashtirish α *tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish* deyiladi.

Agar X nuqta α tekislikda yotsa, X nuqta o'ziga o'tadi deb hisoblanadi. Agar α tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish shaklni o'ziga almashtirsa, u holda shakl α *tekislikka nisbatan simmetrik* deyiladi, α tekislik esa bu shaklning simmetriya tekisligi deyiladi.

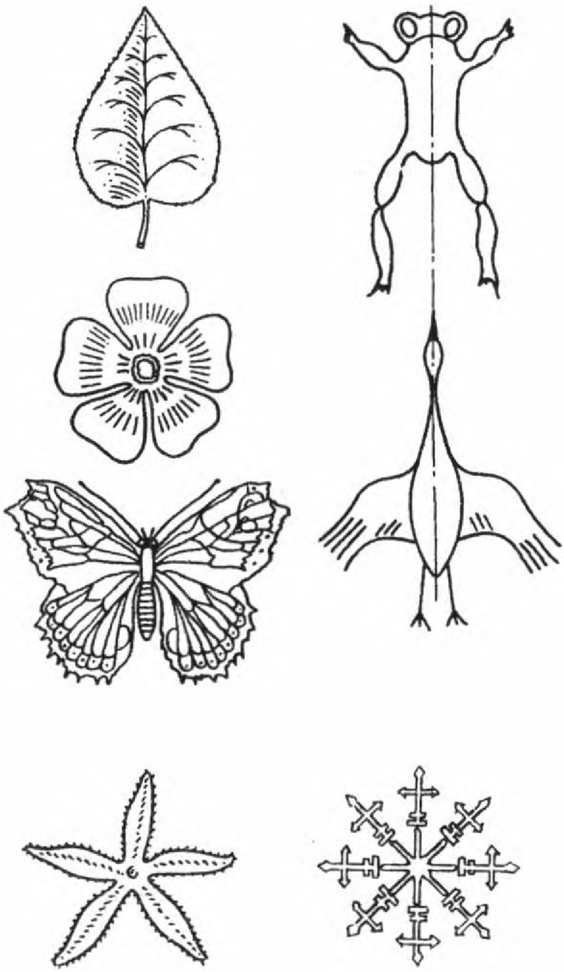
Masala (11). (1; 2; 3), (0; — 1; 2), (1; 0; —3) nuqtalar berilgan. Berilgan nuqtalarga koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik nuqtalarni toping.

Yechilishi. (1; 2; 3) nuqtaga xy tekislikka nisbatan simmetrik nuqta xy tekislikka perpendikular to'g'ri chiziqda yotadi. Shuning uchun o'sha x va y koordinatalarga ega: $x = 1$, $y = 2$. Simmetrik nuqta xy tekislikdan boshqa tomonda o'sha masofada yotadi. Shuning uchun uning z koordinatasi faqat ishorasi bilan farq qiladi, ya'ni $z = -3$. Shunday qilib, (1; 2; 3) nuqtaga xy tekislikka nisbatan simmetrik nuqta (1; 2; — 3) bo'ladi. Boshqa nuqtalar va boshqa koordinata tekisliklari uchun yechim shunga o'xshash bo'ladi.

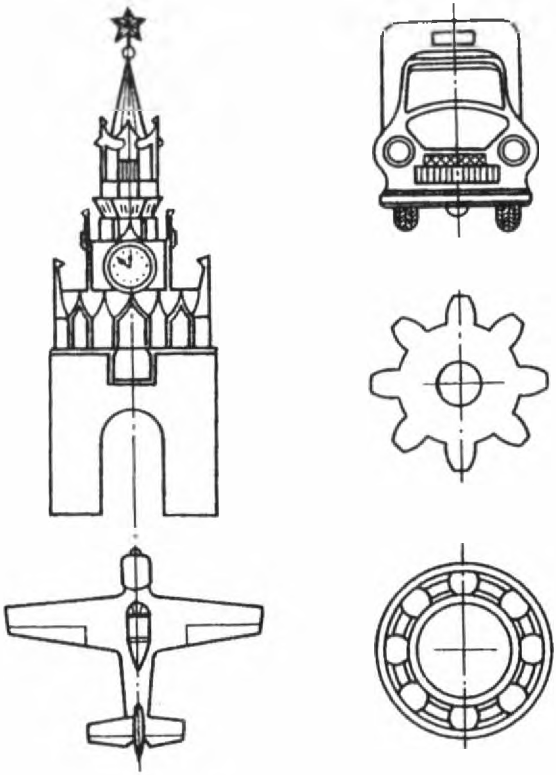
27. Tabiatda va amalda simmetriya

Simmetriya tabiatda keng tarqalgan. Uni barglarning va o'simlik gullarining shaklida, jonivorlarning turli a'zolari joylashishida, kristall moddalarning shaklida kuzatish mumkin (100-rasm).

Simmetriyadan amalda qurilishda va texnikada keng foydalaniladi (101-rasm).



100- rasm.

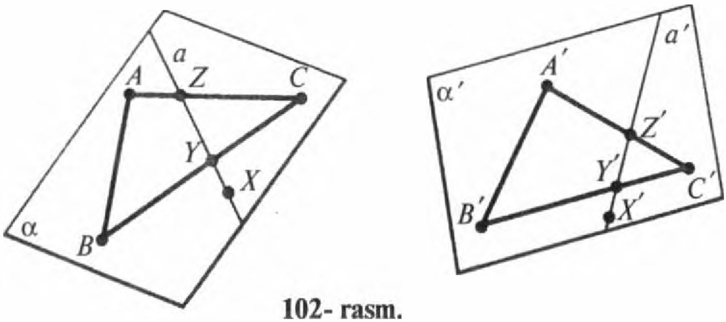


101- rasm.

28. Fazoda harakat

Fazoda harakat xuddi tekislikdagidek aniqlanadi. Xususan: nuqtalar orasidagi masofalar saqlanadigan almashtirish *harakat* deyiladi.

Shuningdek, tekislikdagi harakat singari fazodagi harakatda to‘g‘ri chiziqlar to‘g‘ri chiziqlarga o‘tishi, yarim to‘g‘ri chiziqlar — yarim to‘g‘ri chiziqlarga, kesmalar — kesmalarga o‘tishi va yarim to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchaklar saqlanishi isbot qilinadi.



102- rasm.

Fazodagi harakatning yangi xossasi shundaki, unda ***harakat tekisliklarni tekisliklarga o'tkazadi.***

Shu xossani isbotlaymiz. α — ixtiyoriy tekislik bo'lsin (102-rasm). Unda bir to'g'ri chiziqda yotmagan istagan uchta A, B, C nuqtani belgilaymiz. Bu nuqtalar harakat natijasida bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta A', B', C' nuqtaga o'tadi. Bu nuqtalar orqali α' tekislikni o'tkazamiz.

Qaralayotgan harakatda α tekislik α' tekislikka o'tishini isbot qilamiz.

X nuqta α tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Bu nuqta orqali α tekislikda ABC uchburchakni ikkita Y va Z nuqtada kesib o'tuvchi biror to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. a to'g'ri chiziq harakat natijasida biror a' to'g'ri chiziqqa o'tadi. a to'g'ri chiziqdagi Y va Z nuqtalar $A'B'C'$ uchburchakka tegishli, demak, α' tekislikka tegishli Y' va Z' nuqtalarga o'tadi.

Shunday qilib, a' to'g'ri chiziq α' tekislikda yotadi. X nuqta harakat tufayli a' to'g'ri chiziqdagi, demak, α' tekislikdagi X' nuqtaga o'tadi. Da'vo isbotlandi.

Fazoda, xuddi tekislikdagidek, agar ikki shakl harakat natijasida ustma-ust tushsa, ular *teng shakllar* deyiladi.

29. Fazoda parallel ko'chirish

Fazoda *parallel ko'chirish* deb shunday almashtirishga aytiladiki, unda shaklning ixtiyoriy $(x; y; z)$ nuqtasi $(x+a; y+b; z+c)$ nuqtada o'tadi, bunda

a, b, c sonlar hamma (x; y; z) nuqtalar uchun bir xil. Fazoda parallel ko‘chirish

$$x' = x + a,\quad y' = y + b,\quad z' = z + c$$

formulalar bilan beriladi; bu formulalar parallel ko‘chirishda (x; y; z) nuqta o‘tadigan nuqtaning x', y', z' koordinatalarini ifodalaydi. Xuddi tekislikdagi singari parallel ko‘chirishning quyidagi xossalari ham isbotlanadi:

1. Parallel ko‘chirish harakatdir.

2. Parallel ko‘chirishda nuqtalar parallel (yoki ustma-ust tushuvchi) to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha bir xil masofaga ko‘chadi.

3. Parallel ko‘chirishda har bir to‘g‘ri chiziq unga parallel to‘g‘ri chiziqqa (yoki o‘ziga) o‘tadi.

4. A va A' nuqtalar qanday bo‘lmasin, A nuqtani A' nuqtaga o‘tkazadigan yagona parallel ko‘chirish mavjud.

M a s a l a (14). Agar $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$ parallel ko‘chirishda A (1; 0; 2) nuqta A' (2; 1; 0) nuqtaga o‘tsa, parallel ko‘chirish formulalaridagi a, b, c ning qiymatlarini toping.

Y e c h i l i s h i. Parallel ko‘chirish formulalariga A va A' nuqtalarning koordinatalarini, ya’ni $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z' = 0$ larni qo‘yib,

$$2 = 1 + a,\quad 1 = 0 + b,\quad 0 = 2 + c$$

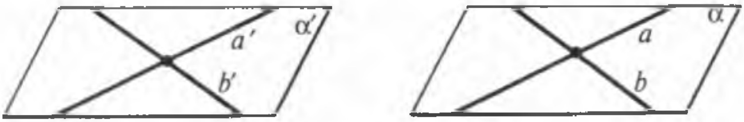
tenglamalarni hosil qilamiz, bu tenglamalardan a, b, c lar topiladi:

$$a = 1,\quad b = 1,\quad c = -2.$$

Fazoda parallel ko‘chirish uchun quyidagi xossa yangi hisoblanadi:

5. ***Fazoda parallel ko‘chirishda har bir tekislik yo o‘ziga, yoki o‘ziga parallel tekislikka o‘tadi.***

Haqiqatan, α — ixtiyoriy tekislik bo‘lsin (103-rasm). Bu tekislikda kesishuvchi ikkita a va b to‘g‘ri chiziqni o‘tkazamiz. Parallel ko‘chirishda a va b to‘g‘ri chiziqlar



103- rasm.

yo o'ziga, yoki parallel a' va b' to'g'ri chiziqlarga o'tadi. α tekislik a' va b' to'g'ri chiziqlar orqali o'tuvchi biror α' tekislikka o'tadi. Agar α' tekislik α tekislik bilan ustma-ust tushmasa, u holda 2.4- teoremaga ko'ra u α tekislikka parallel bo'ladi, shuni isbotlash talab qilingan edi.

30. Fazoviy shakllarning o'xshashligi

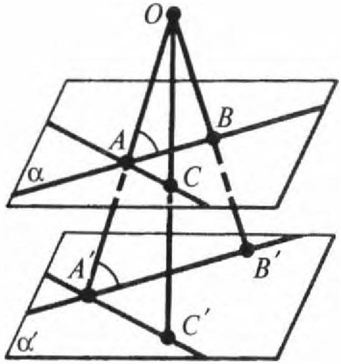
Fazoda o'xshashlik almashtirishlari xuddi tekislikdagidek aniqlanadi. Xususan: F shaklni almashtirishda nuqtalar orasidagi masofalar ayni bir son marta o'zgarsa, ya'ni F shaklning istalgan ikkita X va Y nuqtasi uchun va F' shaklning bu nuqtalar o'tadigan X', Y', nuqtalari uchun $X'Y'=k\cdot XY$ bo'lsa, F shaklni almashtirish *o'xshashlik almashtirishi* deyiladi.

Xuddi tekislikdagi kabi fazoda o'xshashlik almashtirishi to'g'ri chiziqlarni to'g'ri chiziqlarga, yarim to'g'ri chiziqlarni yarim to'g'ri chiziqlarga, kesmalarni kesmalarga o'tkazadi va yarim to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakni saqlaydi. 28-banddagi mulohazalar kabi o'xshashlik almashtirishi tekisliklarni tekisliklarga o'tkazishi isbotlanadi. Xuddi tekislikdagi kabi, agar ikki shakl o'xshashlik almashtirishi bilan biri ikkinchisiga o'tsa, bu ikki shakl *o'xshash* deyiladi.

Fazoda eng sodda o'xshashlik almashtirishi gomotetiyadir. Xuddi tekislikdagi kabi O markazga nisbatan k gomotetiya koeffitsiyentli *gomotetiya* — bu, ixtiyoriy X nuqtani OX nurning $OX'=k\cdot OX$ bo'ladigan X' nuqtaga o'tkazadigan shakl almashtirishdir.

Fazoda gomotetiya almashtirishi gomotetiya markazidan o'tmagan istalgan tekislikni parallel tekislikka (yoki k=1 da o'ziga) o'tkazadi.

Haqiqatan, O nuqta — gomotetiya markazi va α tekislik O nuqtadan o‘tmaydigan istalgan tekislik bo‘lsin (104-rasm). α tekislikdagi istalgan AB to‘g‘ri chiziqni olamiz. Gomotetiya almashtirishi A nuqtani OA nurdagi A' nuqtaga, B nuqtani OB nurdagi B' nuqtaga o‘tkazadi, bunda $\frac{OA'}{OA}=k, \frac{OB'}{OB}=k$ bo‘lib, k — gomotetiya koeffitsiyenti. Bundan AOB va $A'OB'$ uchburchaklarning o‘xshashligi kelib chiqadi. Uchburchaklarning o‘xshashligidan tegishli OAB va $OA'B'$ burchaklarning tengligi, demak, AB va $A'B'$ to‘g‘ri chiziqlarning parallelligi kelib chiqadi.

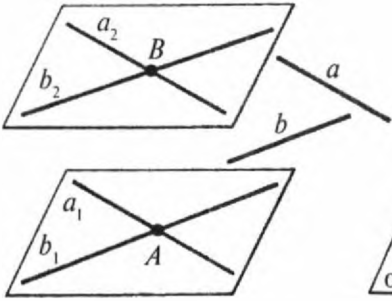


104- rasm.

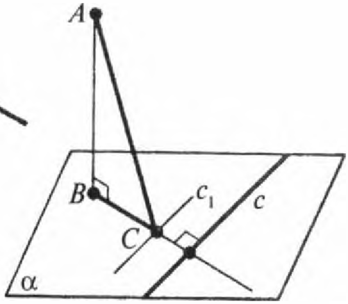
Endi α tekislikda boshqa AC to‘g‘ri chiziqni olamiz. U gomotetiyada o‘ziga parallel $A'C'$ to‘g‘ri chiziqqa o‘tadi. Qaralayotgan gomotetiyada α tekislik $A'B'$, $A'C'$ to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi α' tekislikka o‘tadi. $A'B' \parallel AB$ va $A'C' \parallel AC$ bo‘lgani uchun 2.4-teoremaga ko‘ra α va α' tekisliklar paralleldir, shuni isbotlash talab qilingan edi.

31. Ayqash to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak

Kesishadigan ikkita to‘g‘ri chiziq qo‘shni va vertikal burchaklar hosil qiladi. Vertikal burchaklar teng, qo‘shni burchaklar esa bir-birini $180°$ gacha to‘ldiradi. Ulardan kichigining burchak o‘lchovi *to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak* deyiladi. Perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak ta’rifga ko‘ra $90°$ ga teng. Parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni nolga teng deb hisoblaymiz.



105- rasm.



106- rasm.

Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak deb berilgan ayqash to'g'ri chiziqlarga parallel kesishuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka aytiladi.

Bu burchak kesishuvchi to'g'ri chiziqlarning tanlab olinishiga bog'liq emas. Buni isbotlaymiz.

a_1 va b_1 — berilgan a va b ayqash to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lib, A nuqtada kesishuvchi to'g'ri chiziqlar bo'lsin (105- rasm). a_2 va b_2 — berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel, B nuqtada kesishuvchi boshqa to'g'ri chiziqlar bo'lsin. 2.2- teoremaga ko'ra a_1 va a_2 to'g'ri chiziqlar parallel (yoki ustma-ust tushadi) hamda b_1 va b_2 to'g'ri chiziqlar ham parallel (yoki ustma-ust tushadi). A nuqtani B nuqtaga o'tkazadigan parallel ko'chirishni bajaramiz. Parallel ko'chirishda har bir to'g'ri chiziq yo o'ziga, yoki parallel to'g'ri chiziqqa o'tgani uchun ko'rsatilgan parallel ko'chirish a_1 to'g'ri chiziqni a_2 to'g'ri chiziqqa, b_1 to'g'ri chiziqni b_2 to'g'ri chiziqqa o'tkazadi. Parallel ko'chirish burchak kattaligini saqlagani uchun a_1 va b_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak a_2 va b_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng. Shuni isbotlash talab etilgan edi.

Avval berilgan ta'rifga ko'ra to'g'ri burchak ostida kesishadigan to'g'ri chiziqlar perpendikular to'g'ri chiziqlar deyiladi. Ba'zan orasidagi burchagi 90° ga teng bo'lgan ayqash to'g'ri chiziqlar ham perpendikular to'g'ri chiziqlar deyiladi.

M a s a l a (20). Og'maning tekislikka proyeksiyasiga perpendikular bo'lgan tekislikdagi har qanday to'g'ri chiziq og'maga ham perpendikular bo'lishini isbotlang. Va aksincha: agar tekislikdagi to'g'ri chiziq og'maga perpendikular bo'lsa, u og'maning proyeksiyasiga ham perpendikular bo'ladi.

Y e c h i l i s h i . AB to'g'ri chiziq α tekislikka perpendikular, AC — og'ma va c to'g'ri chiziq — α tekislikdagi BC ga perpendikular bo'lsin (106-rasm). Og'maning C asosidan $c_1 \parallel c$ to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

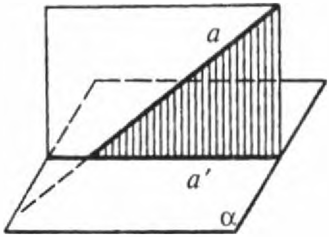
Uch perpendikular haqidagi teoremaga ko'ra c_1 to'g'ri chiziq AC og'maga perpendikular bo'ladi. c to'g'ri chiziq bilan AC og'ma orasidagi burchak AC va c_1 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng bo'lgani uchun c to'g'ri chiziq ham AC og'maga perpendikular bo'ladi.

Aksincha: agar c to'g'ri chiziq AC og'maga perpendikular bo'lsa, u holda c_1 to'g'ri chiziq ham unga perpendikular bo'ladi, demak, uch perpendikular haqidagi teoremaga ko'ra uning BC proyeksiyasiga ham perpendikular. $c \parallel c_1$ bo'lgani uchun $c \perp BC$ bo'ladi.

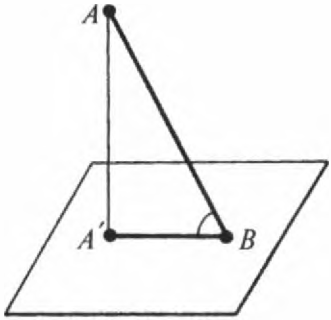
32. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak

To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak tushunchasiga ta'rif beramiz.

α — tekislik va a — uni kesib o'tuvchi, lekin unga perpendikular bo'lmagan to'g'ri chiziq bo'lsin (107-rasm). a to'g'ri chiziqning nuqtalaridan α tekislikka tushirilgan perpendikularning asoslari a' to'g'ri chiziqda yotadi. Bu to'g'ri chiziq a' to'g'ri chiziqning α tekislikdagi *proyeksiyasi* deyiladi. To'g'ri chiziq bilan uning tekislikdagi proyeksiyasi orasidagi burchak *to'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak* deyiladi.



107- rasm.



108- rasm.

Agar to‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikular bo‘lsa, ular orasidagi burchak 90° ga teng deb hisoblanadi. Agar ular parallel bo‘lsa, u holda 0° bo‘ladi. *a* to‘g‘ri chiziq va uning α tekislikdagi *a′* proyeksiyasi hamda α tekislikning *a* to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasidan tekislikka o‘tkazilgan perpendikular bitta tekislikda yotgani uchun *to‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak shu to‘g‘ri chiziq bilan tekislikka o‘tkazilgan perpendikular orasidagi burchakni 90°ga to‘ldiradi.*

M a s a l a (22). *A* nuqta tekislikdan *h* masofada turadi. Shu nuqtadan tekislikka: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° li burchak ostida o‘tkazilgan og‘malarning uzunliklarini toping.

Y e c h i l i s h i. Tekislikka AA' perpendikular tushiramiz (108- rasm). $AA'B$ uchburchak A' uchidagi burchagi to‘g‘ri bo‘lgan to‘g‘ri burchakli uchburchakdir. Bu uchburchakning AA' kateti qarshisida yotgan o‘tkir burchagi 30° ga (mos ravishda 45°, 60° ga) teng. Shuning uchun birinchi holda og‘ma $AB = \frac{AA'}{\sin 30°} = 2h$. Ikkinchi holda $AB = h\sqrt{2}$, uchinchi holda $AB = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

33. Tekisliklar orasidagi burchak

Tekisliklar orasidagi burchak tushunchasini ta'riflaymiz. Parallel tekisliklar orasidagi burchak nolga teng deb hisoblanadi.

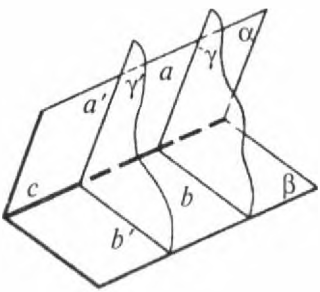
Berilgan tekisliklar kesishadi deb faraz qilaylik. Ularning kesishgan to'g'ri chizig'iga perpendikular tekislik o'tkazamiz. Bu tekislik berilgan tekisliklarni ikkita to'g'ri chiziq bo'yicha kesadi. Bu to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak *berilgan tekisliklar orasidagi burchak* deyiladi (109- rasm).

Tekisliklar orasidagi burchakning bu tariqa ta'riflanganligi kesuvchi tekislikning tanlanishiga bog'liq emas. Shuni isbotlaymiz.

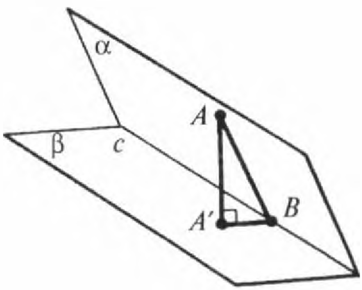
α va β tekisliklar c to'g'ri chiziq bo'yicha kesishuvchi berilgan tekisliklar bo'lsin. c to'g'ri chiziqqa perpendikular γ tekislikni o'tkazamiz. Bu tekislik α va β tekisliklarni a va b to'g'ri chiziqlar bo'yicha kesib o'tadi. α va β tekisliklar orasidagi burchak a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng.

c to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan boshqa kesuvchi γ' tekislikni olamiz. a' va b' — bu tekislikning α va β tekisliklar bilan kesishgan to'g'ri chiziqlari bo'lsin.

γ tekislikning c to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasi γ' tekislikning c to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtasiga o'tadigan parallel ko'chirishni bajaramiz. Bunda parallel ko'chirish xossasiga ko'ra a to'g'ri chiziq a' to'g'ri chiziqqa, b to'g'ri chiziq b' to'g'ri chiziqqa o'tadi.



109- rasm.



110- rasm.

Bu esa a va b, a' va b' to'g'ri chiziqlar orasidagi burchaklar teng demakdir. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

M a s a l a (27). Ikki tekislik 30° ga teng burchak ostida kesishadi. Bu tekisliklarning birida yotgan A nuqta ikkinchi tekislikdan a masofada yotadi. Bu nuqtadan tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'igacha masofani toping.

Y e c h i l i s h i. α va β — berilgan tekisliklar va A nuqta α tekislikda yotuvchi nuqta bo'lsin (110-rasm). β tekislikka AA' perpendikularni va tekisliklar kesishadigan c to'g'ri chiziqqa AB perpendikularni tushiramiz. Uch perpendikular haqidagi teoremaga ko'ra $A'B \perp c$. ABA' uchburchak tekisligi c to'g'ri chiziqqa perpendikular va shuning uchun to'g'ri burchakli ABA' uchburchakning B uchidagi burchak 30°ga teng. Bundan:

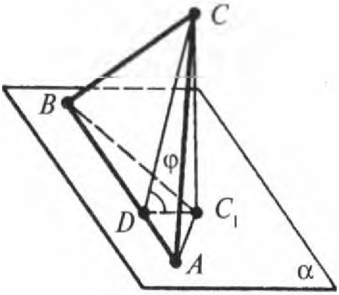
$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^\circ} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

A nuqtadan c to'g'ri chiziqqacha masofa $2a$ ga teng.

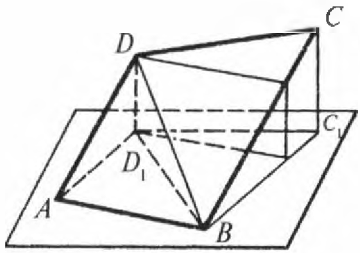
34. Ko'pburchak ortogonal proyeksiyasining yuzi

4.1- teorema. ***Ko'pburchakning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasining yuzi ko'pburchak yuzini uning tekisligi bilan proyeksiyasi tekisligi orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng.***

I s b o t i. Avval uchburchak va uning biror tomonidan o'tuvchi tekislikdagi proyeksiyasini qarab chiqamiz (111- rasm). ABC uchburchakning proyeksiyasi α tekislikdagi ABC_1 uchburchakdan iborat. ABC uchburchakning CD balandligini o'tkazamiz. Uch perpendikular haqidagi teoremaga ko'ra C_1D kesma ABC_1 uchburchakning balandligidir. CDC_1 burchak ABC uchburchak tekisligi bilan proyeksiya tekisligi α orasidagi φ burchakka teng. Quyidagilarga egamiz:



111- rasm.



112- rasm.

$$C_1D = CD\cos\varphi,$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD, \qquad S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB \cdot C_1D.$$

Bundan

$$S_{ABC_1} = S_{ABC}\cos\varphi$$

Shunday qilib, qaralayotgan holda teorema o'rinli. α tekislik o'rniga unga parallel istalgan tekislik olinganda ham teorema o'z kuchini saqlaydi. Haqiqatan shaklni parallel tekisliklarga proyeksiyalaganda uning proyeksiyalari proyeksiyalash yo'nalishida parallel ko'chirish natijasida ustma-ust keltirilishi mumkin. Parallel ko'chirishda ustma-ust tushadigan shakllar esa bir-biriga teng.

Endi umumiy holni qarab chiqamiz. Berilgan ko'pburchakni uchburchaklarga ajratamiz. Proyeksiya tekisligiga parallel tomoni bo'lmagan har bir uchburchakni, 112- rasmda *ABCD* to'rtburchak uchun qilinganidek, umumiy tomoni proyeksiya tekisligiga parallel bo'lgan ikkita uchburchakka ajratamiz.

Endi bo'linish natijasida ajratilgan Δ uchburchakning har biri uchun va uning Δ' proyeksiyasi uchun $S_{\Delta'} = S_{\Delta}\cos\varphi$ tenglikni yozamiz. Bu tengliklarning hammasini hadma-had qo'shamiz. Bunda chap tomonda ko'pburchak proyeksiyasining yuzini, o'ng tomonda esa ko'pburchak yuzini cosφ ga ko'paytirilganini hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

35. Fazoda vektorlar

Fazoda, tekislikdagi singari, *vektor* deb yo‘naltirilgan kesmaga aytiladi. Fazoda vektorlar uchun asosiy tushunchalar: vektorlarning absolut kattaligi (moduli), vektorning yo‘nalishi, vektorlarning tengligi tekislikdagi singari ta’riflanadi.

Boshi A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ nuqtada va oxiri A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ nuqtada bo‘lgan vektorlarning *koordinatalari* deb x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 sonlarga aytiladi. Xuddi tekislikdagi singari teng vektorlarning mos koordinatalari teng ekani, va aksincha, mos koordinatalari teng vektorlarning tengligi isbotlandi. Bu esa vektorni uning koordinatalari bilan ifodalashga asos bo‘ladi: $\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$ yoki soddaroq $\overline{(a_1; a_2; a_3)}$.

M a s a l a (31). To‘rtta nuqta berilgan: A (2; 7; −3), B (1; 0; 3), C (−3; −4; 5), D (−2; 3; −1). $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ va $\overline{BD}$ vektorlar orasidan teng vektorlarni ko‘rsating.

Y e c h i l i s h i. Ko‘rsatilgan $\overline{AB}$, $\overline{BC}$,... vektorlarning koordinatalarini topish va mos koordinatalarni taqqoslash kerak. Teng vektorlarning mos koordinatalari teng. Masalan, AB vektorning koordinatalari: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$. DC vektorning koordinatalari ham huddi shunday: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Shunday qilib, AB, DC vektorlar teng. Teng vektorlarning yana bir jufti BC, AD dan iborat.

36. Fazoda vektorlar ustida amallar

Vektorlar ustida amallar: qo‘shish, songa ko‘paytirish va skalar ko‘paytirish amallari xuddi tekislikdagidek ta’riflanadi.

$\overline{a}$ $(a_1; a_2; a_3)$, va $\overline{b}$ $(b_1; b_2; b_3)$ vektorlar *yig‘indisi* deb $\overline{c}$ $(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)$ vektorga aytiladi.

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ vektor tenglik xuddi tekislikdagidek isbotlanadi. $\bar{a}(a_1; a_2; a_3)$ vektorning λ *songa ko'paytmasi deb* $\lambda\bar{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$ vektorga aytiladi.

Tekislikda isbot qilingani singari, bu yerda ham $\lambda\bar{a}$ vektorning moduli $|\lambda|\,|\bar{a}|$ ga tengligi, yo'nalishi esa $\lambda > 0$ uchun $\bar{a}$ vektorning yo'nalishi bilan bir xil va $\lambda < 0$ uchun esa $\bar{a}$ vektorning yo'nalishiga teskari bo'lishi isbotlanadi.

M a s a l a (33). $\bar{a}$ (1; 2; 3) vektor berilgan. Boshi A (1; 1; 1) nuqtada va oxiri xy tekislikdagi B nuqtada bo'lgan unga kollinear vektorni toping.

Y e c h i l i s h i. B nuqtaning z koordinatasi nolga teng $\overline{AB}$ vektorning koordinatalari. $x-1$, $y-1$, $0-1=-1$. $\bar{a}$ va $\overline{AB}$ vektorlarning kollinearligidan.

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}$$

proporsiyani hosil qilamiz. Bundan B nuqtaning x, y koordinatalarini topamiz:

$$x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}.$$

$(a_1;\ a_2;\ a_3)$ va $(b_1;\ b_2;\ b_3)$ vektorlarning skalar ko'paytmasi deb $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ ga teng songa aytiladi. Vektorlarning skalar ko'paytmasi ularning modullarini vektorlar orasidagi burchak kosinusiga ko'paytmasiga teng ekani xuddi tekislikdagidek isbotlanadi.

M a s a l a (36). To'rtta nuqta berilgan: A (0; 1; −1), B (1; −1; 2), C (3; 1; 0), D (2; −3; 1). $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusini toping.

Y e c h i l i s h i. $\overline{AB}$ vektorning koordinatalari quyidagilar bo'ladi:

$$1-0=1,\ -1-1=-2,\ 2-(-1)=3;$$

$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

$\overline{CD}$ vektorning koordinatalari:

$$2-3=-1,\quad -3-1=-4,\quad 1-0=1;$$

$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Demak,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

? TEKSHIRISH UCHUN SAVOLLAR

1. Fazoda nuqtaning koordinatalari qanday aniqlanishini tushuntiring.
2. Ikki nuqta orasidagi masofani ularning koordinatalari orqali ifodalang.
3. Kesma o'rtasining koordinatalarini kesma oxirlarining koordinatalari orqali ifodalovchi formulalarni chiqaring.
4. Nuqtaga nisbatan simmetrik almashtirish nima? Markaziy simmetrik shakl deb qanday shaklga aytiladi?
5. Tekislikka nisbatan simmetrik almashtirish nima ekanini tushuntiring. Shaklning simmetriya tekisligi nima?
6. Shaklni qanday almashtirish harakat deyiladi?
7. Fazodagi harakat tekislikni tekislikka o'tkazishini isbotlang.
8. Fazoda qanday shakllar teng deyiladi?
9. Parallel ko'chirishning ta'rifini ayting.
10. Parallel ko'chirishning xossalarini aytib o'ting.
11. Fazoda parallel ko'chirishda har bir tekislik o'z-o'ziga yoki parallel tekislikka o'tishini isbotlang.
12. O'xshashlik almashtirishi nima? Uning xossalarini sanab o'ting.
13. Qanday almashtirish gomotetiya deyiladi? Fazoda gomotetik almashtirish gomotetiya markazidan o'tmagan istalgan tekislikni parallel tekislikka (yoki o'ziga) o'tkazishini isbotlang.
14. Ayqash to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakning ta'rifini ayting.
15. To'g'ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchakka ta'rif bering.

16. Tekisliklar orasidagi burchakka ta'rif bering.

17. Ko'pburchakning tekislikka ortogonal proyeksiyasining yuzi uning yuzining ko'pburchak yuzi bilan uning proyeksiyasi tekisligi orasidagi burchakning kosinusiga ko'paytmasiga teng bo'lishini isbotlang.

18. Vektorning absolut kattaligi nima? Qanday vektorlar bir xil yo'nalgan vektorlar deyiladi?

19. Boshi A_1 $(x_1; y_1; z_1)$ va oxiri A_2 $(x_2; y_2; z_2)$ nuqtada bo'lgan vektorning koordinatalariga ta'rif bering.

20. Vektorlar ustida bajariladigan: qo'shish, songa ko'paytirish, skalar ko'paytirish amallarini ta'riflang.

MASALALAR

1. x va y ning koordinatalari nolga teng bo'lgan fazo nuqtalari qayerda yotadi?

2. A (1; 2; 3), B (0; 1; 2), C (0; 0; 3), D (1; 2; 0) nuqtalar berilgan. Bu nuqtalardan qaysilari: 1) xy tekislikda; 2) z o'qda; 3) yz tekislikda yotadi?

3. xy tekislikda A (0; 1; −1), B (−1; 0; 1), C (0; −1; 0) nuqtalardan baravar uzoqlashgan D (x; y; 0) nuqtani toping.

4. (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi va yz tekislikdan 2 birlik masofadagi nuqtalarni toping.

5. x o'qida A (1; 2; 3), B (−2; 1; 3) nuqtalardan baravar uzoqlikdagi C (x; 0; 0) nuqtani toping.

6. Uchlari A (1; 2; 3), B (0; 2; 4), C (1; 1; 4), D (2; 2; 2) nuqtalarda bo'lgan $ABCD$ to'rtburchakning parallelogramm ekanini isbotlang.

7. Uchlari: 1) A (6; 7; 8), B (8; 2; 6), C (4; 3; 2), D (2; 8; 4); 2) A (0; 2; 0), B (1; 0; 0), C (2; 0; 2), D (1; 2; 2) nuqtalardagi $ABCD$ to'rtburchakning romb ekanini isbotlang.

8. $ABCD$ parallelogrammning uchta uchining koordinatalari berilgan; to'rtinchi D uchining koordinatalarini toping:

1) A (2; 3; 2), B (0; 2; 4), C (4; 1; 0); 2) A (1; −1; 0), B (0; 1; −1), C (−1; 0; 1); 3) A (4; 2; −1), B (1; −3; 2), C (−4; 2; 1).

9. Oxirlari A $(a;\ c;\ -b)$ va B $(-a;\ d;\ b)$ nuqtalarda bo'lgan kesma o'rtasining y o'qda yotishini isbotlang.

10. xy koordinata tekisligiga nisbatan simmetriya almashtirishi $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$ formulalar bilan ifodalanishini isbotlang.

11. (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3) nuqtalar berilgan. Berilgan nuqtalarga koordinata tekisliklariga nisbatan simmetrik nuqtalarni toping.

12. Nuqtaga nisbatan simmetriya almashtirishi harakat ekanini isbotlang.

13. Doira fazoda harakatlanganda o'shanday radiusli doiraga o'tishini isbotlang.

14. Agar $x' = x + a$ $y' = y + b$, $z' = z + c$ parallel ko'chirishda A (1; 0; 2) nuqta A' (2; 1; 0) nuqtaga o'tsa, parallel ko'chirish formulalaridagi a, b, c ning qiymatlarini toping.

15. A nuqta B nuqtaga, C nuqta D nuqtaga o'tadigan parallel ko'chirish mavjudmi, bunda:

1) A (2; 1; 0), B (1; 0; 1), C (3; −2; 1), D (2; −3; 0);
2) A (−2; 3; 5), B (1; 2; 4), C (4; −3; 6), D (7; −2; 5);
3) A (0; 1; 2), B (−1; 0; 1), C (3; −2; 2), D (2; −3; 1);
4) A (1; 1; 0), B (0; 0; 0), C (−2; 2; 1), D (1; 1;1)?

16. Parallel ko'chirishda parallelogramm o'ziga teng parallelogrammga o'tishini isbotlang.

17. Fazoda gomotetiya almashtirishi o'xshashlik almashtirishi ekanini isbotlang.

18. S nuqta orqali o'tuvchi uchta to'g'ri chiziq berilgan tekislikni A, B, C nuqtalarda kesadi, unga parallel tekislikni esa A_1, B_1, C_1 nuqtalarda kesadi. ABC va $A_1B_1C_1$ uchburchaklar gomotetik ekanini isbotlang.

19*. Bitta to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta A, B, C berilgan. Agar CA va CB to'g'ri chiziqlar AB to'g'ri chiziq bilan α va β burchaklar tashkil etsa hamda $\alpha + \beta < 90°$ bo'lsa, CA va CB to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak nimaga teng?

20. Og'maning tekislikka proyeksiyasiga perpendikular bo'lgan tekislikdagi har qanday to'g'ri chiziq og'maga ham perpendikular bo'lishini isbotlang. Va aksincha: agar tekislikdagi to'g'ri chiziq og'maga perpendikular bo'lsa, u og'maning proyeksiyasiga ham perpendikular bo'ladi.

21. 1) Parallel tekisliklarni kesib o'tuvchi to'g'ri chiziq ularni teng burchaklar ostida kesib o'tishini isbotlang.

2) Parallel to'g'ri chiziqlarni kesib o'tuvchi tekislik ularni teng burchaklar ostida kesib o'tishini isbotlang.

22. A nuqta tekislikdan h masofada yotadi. Bu nuqtadan tekislikka: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° li burchak ostida o'tkazilgan og'malarning uzunliklarini toping.

23. Uzunligi 10 m ga teng kesma tekislikni kesib o'tadi: uning oxirlari tekislikdan 2 m va 3 m masofada turadi. Berilgan kesma bilan tekislik orasidagi burchakni toping.

24. Tekislikdan a masofada yotgan nuqtadan tekislik bilan 45° li burchaklar va o'zaro 60° li burchak tashkil etgan ikkita og'ma o'tkazilgan. Og'malarning oxirlari orasidagi masofani toping.

25. Teng yonli to'g'ri burchakli uchburchakning bir kateti orqali ikkinchi katetiga 45° burchak ostida tekislik o'tkazilgan. Gipotenuza bilan tekislik orasidagi burchakni toping.

26. Parallel tekisliklarni kesib o'tuvchi tekislik ularni teng burchaklar ostida kesishini isbotlang.

27. Ikkita tekislik 30° ga teng burchak ostida kesishadi. Bu tekisliklarning birida yotgan A nuqta ikkinchi tekislikdan a masofada yotadi. Bu nuqtadan tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'igacha masofani toping.

28.Teng yonli ikkita uchburchakning asoslari umumiy, ularning tekisliklari 60° ga teng burchakni tashkil etadi. Umumiy asos 16 m ga teng, bir uchburchakning yon tomoni 17 m ga teng, ikkinchi uchburchakning yon tomonlari perpendikular. Uchburchaklarning uchlari orasidagi masofani toping.

29. Umumiy asosi AB bo'lgan teng yonli ABC va ABD uchburchaklar turli tekisliklarda yotadi, ular orasidagi burchak α ga teng. Agar: 1) $AB = 24$ sm, $AC = 13$ sm,

$AD=37$ sm, $CD=35$ sm; 2) $AB=32$ m, $AC=65$ m, $AD=20$ m, $CD=63$ m bo‘lsa, $\cos\alpha$ ni toping.

30. 1) 29- masaladagi ABC uchburchakning ABD uchburchak tekisligiga ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.

2) 29- masaladagi ABD uchburchakning ABC uchburchak tekisligiga ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.

31. To‘rtta nuqta berilgan: A (2; 7; −3), B (1; 0; 3), C (−3; −4; 5), D (−2; 3; −1). $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ va $\overline{BD}$ vektorlar orasidan teng vektorlarni ko‘rsating.

32. $\overline{(2;\ n;\ 3)}$ va $\overline{(3;\ 2;\ m)}$ vektorlar berilgan. m va n ning qanday qiymatlarida bu vektorlar kollinear bo‘ladi?

33. $\overline{a}$ (1; 2; 3) vektor berilgan. Boshi A (1; 1; 1) nuqtada va oxiri xy tekislikdagi B nuqtada bo‘lgan unga kollinear vektorni toping.

34. Uchta nuqta berilgan: A (1; 0; 1), B (—1; 1; 2), C (0; 2;—1). z o‘qda shunday D (0; 0; c) nuqtani topingki, $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar perpendikular bo‘lsin.

35. Birlik uzunlikdagi $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ vektorlar juft-jufti bilan 60° li burchak tashkil etadi. 1) $\overline{a}$ va $\overline{b}+\overline{c}$; 2) $\overline{a}$ va $\overline{b}-\overline{c}$ vektorlar orasidagi φ burchakni toping.

36. To‘rtta nuqta berilgan: A (0; 1; —1), B (1; —1; 2), C (3; 1; 0), D (2; −3; 1). $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar orasidagi φ burchakning kosinusini toping.

37*. $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlarni o‘z ichiga oluvchi to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak

$$|\overline{ab}|=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi$$

tenglamadan aniqlanishini isbotlang.

38. Og‘ma tekislik bilan 45° li burchak tashkil etadi. Og‘ma asosidan tekislikda og‘maning proyeksiyasiga 45° li burchak ostida to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Shu to‘g‘ri chiziq bilan og‘ma orasidagi φ burchakni toping.

10- SINF GEOMETRIYA KURSINI TAKRORLASH UCHUN MASALALAR

1. Berilgan ikki to'g'ri chiziqning kesishgan nuqtasidan bu to'g'ri chiziqlar bilan bir tekislikda yotmaydigan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

2. *a* to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadigan ikkita tekislik va shu tekisliklarning birida yotib, ikkinchisini kesib o'tadigan *b* to'g'ri chiziq berilgan. *a* va *b* to'g'ri chiziqlarning kesishishini isbotlang.

3. To'rtta nuqta bir tekislikda yotmaydi. Ulardan qandaydir uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotishi mumkinmi? Javobingizni tushuntiring.

4. Berilgan to'g'ri chiziqni kesib o'tadigan va to'g'ri chiziqdan tashqaridagi nuqtadan o'tadigan hamma to'g'ri chiziqlarning bitta tekislikda yotishini isbotlang.

5. Bir tekislikda yotmaydigan to'rtta nuqta berilgan. Bu nuqtalarning uchtasidan o'tuvchi nechta turli tekislik o'tkazish mumkin? Javobingizni tushuntiring.

6*. To'rtta nuqta berilgan. Bu nuqtalarning istalgan ikkitasidan o'tuvchi to'g'ri chiziqning qolgan ikkita nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan kesishmasligi ma'lum. Berilgan to'rtta nuqtaning bir tekislikda yotmasligini isbotlang.

7. *a* va *b* ayqash to'g'ri chiziqlarga tegishli bo'lmagan *C* nuqta orqali har biri *a* va *b* to'g'ri chiziqlarni kesib o'tadigan ikkita turli to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinmi? Javobingizni tekshiring.

8. *a* va *b* to'g'ri chiziqlar kesishadi. *b* to'g'ri chiziqqa parallel va *a* to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi hamma to'g'ri chiziqlarning bir tekislikda yotishini isbotlang.

9. AB kesmaning A oxiridan tekislik o'tkazilgan. Shu kesmaning B oxiridan va C nuqtasidan tekislikni B_1 va C_1 nuqtalarda kesuvchi parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazilgan. BB_1 kesmaning uzunligini toping, bunda: 1) $CC_1 = 15$ sm, $AC : BC = 2:3$; 2) $CC_1 = 8{,}1$ sm, $AB : AC = 11:9$; 3) $AB = 6$ cm, $AC : CC_1 = 2:5$; 4) $AC = a$, $BC = b$, $CC_1 = c$.

10. *a* va *b* to'g'ri chiziqlar bitta tekislikda yotmaydi. *a* va *b* to'g'ri chiziqlarga parallel *c* to'g'ri chiziqni o'tkazish mumkinmi?

11. A, B, C, D nuqtalar bitta tekislikda yotmaydi. AB va BC kesmalarning o'rtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq AD

va CD kesmalar o‘rtalaridan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqqa parallel ekanini isbotlang.

12. ABC uchburchak berilgan. AB to‘g‘ri chiziqqa parallel tekislik bu uchburchakning AC tomonini A_1 nuqtada, BC tomonini B_1 nuqtada kesib o‘tadi. A_1B_1 kesmaning uzunligini toping, bunda: 1) $AB = 15$ sm, $AA_1 : AC = 2 : 3$; 2) $AB = 8$ sm, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$; 3) $B_1C = 10$ sm, $AB : BC = 4 : 5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.

13. Ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqdan istalgan biri orqali ikkinchisiga parallel tekislik o‘tkazish mumkinligini isbotlang.

14. Agar a to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishuvchi ikki tekislik α tekislikni parallel to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesib o‘tsa, u holda a to‘g‘ri chiziq α tekislikka parallel bo‘lishini isbotlang (113- rasm).

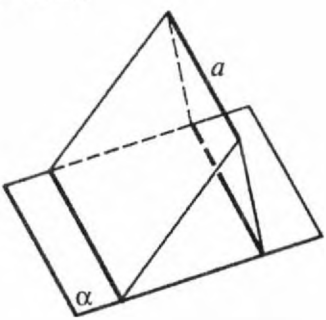
15. Agar to‘g‘ri chiziq ikki parallel tekislikdan birini kesib o‘tsa, ikkinchisini ham kesib o‘tishini isbotlang.

16. Fazoda berilgan nuqtadan ikkita ayqash to‘g‘ri chiziqning har birini kesib o‘tadigan to‘g‘ri chiziq o‘tkazing (114- rasm).

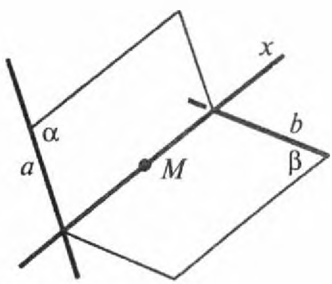
17. α va β tekisliklar kesishadi. Istalgan γ tekislik α, β tekisliklardan kamida bittasini kesib o‘tishini isbotlang.

18. Berilgan nuqtadan ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziqning har biriga parallel bo‘lgan tekislik o‘tkazing. Buni har doim bajarish mumkinmi?

19. Ikkita parallel tekislikning birida yotuvchi $ABCD$ parallelogrammning uchlaridan ikkinchi tekislikni A_1, B_1, C_1, D_1 nuqtalarda kesib o‘tuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. $A_1B_1C_1D_1$ to‘rtburchak ham parallelogramm ekanini isbotlang.



113- rasm.



114- rasm.

20. Agar A nuqtadan o'tuvchi to'rtta to'g'ri chiziq α tekislikni parallelogrammning uchlarida kesib o'tsa, u holda ular A nuqtadan o'tmaydigan va α ga parallel bo'lgan istalgan tekislikni ham parallelogrammning uchlarida kesib o'tishini isbotlang (115- rasm).

21*. A nuqta α tekislikdan tashqarida yotadi. X nuqta α tekislikdagi ixtiyoriy nuqta, X' nuqta AX kesmani $m:n$ nisbatda bo'luvchi nuqta. X' nuqtalarning geometrik o'rni α tekislikka parallel tekislik ekanini isbotlang.

22. To'rtta parallel to'g'ri chiziq berilgan. Agar birorta tekislik bu to'g'ri chiziqlarni parallelogrammning uchlarida kesib o'tsa, u holda berilgan to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lmagan istalgan tekislik ularni biror parallelogrammning uchlarida kesishini isbotlang.

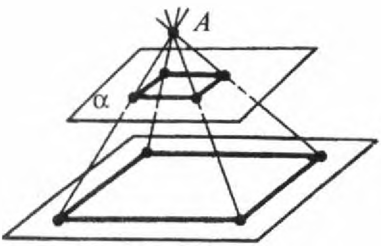
23. Uchburchakning parallel proyeksiyasi berilgan. Uchburchak o'rta chizig'ining proyeksiyasi nima bilan tasvirlanadi?

24*. Aylana va uning diametrining parallel proyeksiyasi berilgan (116- rasm). Perpendikular diametrning proyeksiyasi qanday yasaladi?

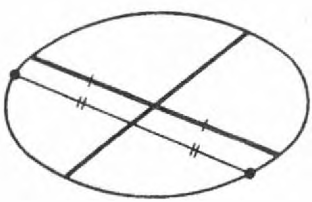
25. Fazodagi to'g'ri chiziqning istalgan nuqtasi orqali unga perpendikular ikkita turli to'g'ri chiziq o'tkazish mumkinligini isbotlang.

26. Berilgan tekislikda yotmagan nuqta orqali tekislikka perpendikular bo'lgan bittadan ortiq to'g'ri chiziq o'tkazib bo'lmasligini isbotlang.

27. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning A uchidan uning tekisligiga perpendikular AK to'g'ri chiziq o'tkazilgan. K nuqtadan to'g'ri to'rtburchakning boshqa uchlarigacha masofa 6 m, 7 m va 9 m. AK kesmani toping.



115- rasm.



116- rasm.

28. a to‘g‘ri chiziqdagi A nuqtadan unga perpendikular β tekislik va b to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. b to‘g‘ri chiziqning β tekislikda yotishini isbotlang.

29. $ABCD$ kvadratning uchidan uning tekisligiga perpendikular BM to‘g‘ri chiziq o‘tkazilgan. Quyidagilarni isbotlang: 1) AD to‘g‘ri chiziq AB va BM to‘g‘ri chiziqlar tekisligiga perpendikular; 2) CD to‘g‘ri chiziq BC va BM to‘g‘ri chiziqlar tekisligiga perpendikular.

30. A va B nuqtalardan α tekislikka perpendikular va uni mos ravishda C va D nuqtalarda kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. $AC = 3$ m, $BD = 2$ m, $CD = 2{,}4$ m va AB kesma α tekislikni kesib o‘tmasa, A va B nuqtalar orasidagi masofani toping.

31. A nuqta tomoni a ga teng bo‘lgan teng tomonli uchburchakning uchlaridan a masofada yotadi. A nuqtadan uchburchak tekisligigacha masofani toping.

32. Teng yonli uchburchakda asosi va balandligi 4 m ga teng. Berilgan nuqta uchburchak tekisligidan 6 m masofada va uning uchlaridan bir xil masofada yotadi. Shu masofani toping.

33. Berilgan nuqtadan tekislikka uzunliklari 10 sm va 17 sm ga teng ikkita og‘ma o‘tkazilgan. Bu og‘malar proyeksiyalarining ayirmasi 9 sm ga teng. Og‘malarning proyeksiyalarini toping.

34. Nuqtadan tekislikka 23 sm va 33 sm ga teng ikkita og‘ma o‘tkazilgan. Agar og‘malarning proyeksiyalari 2 : 3 ga teng nisbatda bo‘lsa, shu nuqtadan tekislikkacha masofani toping.

35. Rombning bir tomoni orqali uning qarama-qarshi tomonidan 4 m masofada tekislik o‘tkazilgan. Diagonallarning bu tekislikdagi proyeksiyalari 8 m va 2 m ga teng. Tomonlarning proyeksiyalarini toping.

36. Ikkita parallel tekislik orasidagi masofa a ga teng. b uzunlikdagi kesmaning oxirlari bu tekisliklarga tiralib turadi. Kesmaning tekisliklardan har biridagi proyeksiyasini aniqlang.

37. Tekislikni kesib o‘tmaydigan berilgan kesmaning oxirlari tekislikdan 0,3 m va 0,5 m masofada yotadi. Berilgan kesmani 3 : 7 ga teng nisbatda bo‘luvchi nuqta tekislikdan qanday masofada yotadi?

38. Agar A va B nuqtalardan tekislikkacha masofa: 1) 3,2 sm va 5,3 sm; 2) 7,4 sm va 6,1 sm; 3) a va b bo‘lsa, AB kesmaning o‘rtasidan bu kesmani kesib o‘tmaydigan tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

39*. Avvalgi masalani AB kesma tekislikni kesib o'tadigan shartda yeching.

40. Parallelogrammning tomoni orqali qarama-qarshi tomonidan a masofada tekislik o'tkazilgan. Parallelogramm diagonallarining kesishgan nuqtasidan shu tekislikkacha masofani toping.

41. Berilgan nuqtadan tekislikka uzunligi 2 m dan ikkita teng og'ma tushirilgan. Agar og'malar orasidagi burchak 60°, ularning proyeksiyalari esa perpendikular bo'lsa, nuqtadan tekislikkacha masofani toping.

42. Uchburchakka radiusi 0,7 m bo'lgan ichki chizilgan aylananing markazidan uchburchak tekisligiga uzunligi 2,4 m ga teng perpendikular chiqarilgan. Bu perpendikularning uchidan uchburchakning tomonlarigacha masofani toping.

43. Teng tomonli ABC uchburchakning uchidan uchburchak tekisligiga AD perpendikular tushirilgan. Agar $AD = 13$ sm, $BC = 6$ sm bo'lsa, D nuqtadan BC tomongacha masofani toping.

44. A nuqtadan kvadratning hamma tomonlarigacha masofa a ga teng. Kvadratning diagonali d ga teng bo'lsa, A nuqtadan kvadrat tekisligigacha masofani toping.

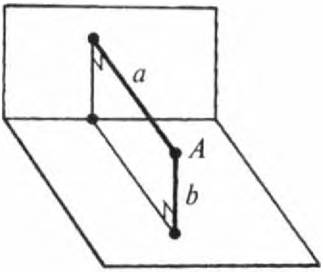
45. Asosi 6 m va yon tomoni 5 m bo'lgan teng yonli uchburchak berilgan. Ichki chizilgan doiraning markazidan uchburchak tekisligiga uzunligi 2 m ga teng perpendikular chiqarilgan. Bu perpendikularning oxiridan uchburchakning tomonlarigacha masofani toping.

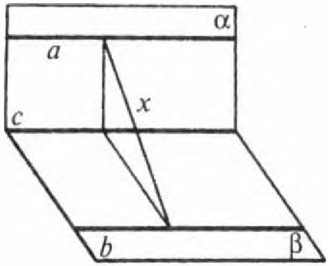
46. a to'g'ri chiziq va α tekislik berilgan. α tekislikka perpendikular va a to'g'ri chiziqni kesib o'tuvchi hamma to'g'ri chiziqlar α tekislikka perpendikular bo'lgan bitta tekislikda yotishini isbotlang.

47. Teng tomonli ABC uchburchakning A, B uchlaridan uchburchak tekisligiga AA_1, BB_1 perpendikularlar chiqarilgan. Agar $AB = 2$ m, $CA_1 = 3$ m, $CB_1 = 7$ m bo'lsa va A_1B_1 kesma uchburchak tekisligini kesib o'tmasa, C uchdan A_1B_1 kesmaning o'rtasigacha bo'lgan masofani toping.

48*. Ikkita o'zaro perpendikular tekisliklarning birida yotgan to'g'ri chiziq bu tekisliklarning kesishish chizig'iga perpendikular bo'lsa, bu to'g'ri chiziq ikkinchi tekislikka ham perpendikular bo'lishini isbotlang.

49. Nuqta ikki perpendikular tekislikdan a, b masofalarda yotadi. Bu nuqtadan tekisliklarning kesishish to'g'ri chizig'igacha masofani toping (117- rasm).





117- rasm. **118- rasm.**

50. O'zaro perpendikular bo'lgan α va β tekisliklar c to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi. α tekislikda $a \parallel c$ to'g'ri chiziq, β tekislikda $b \parallel c$ to'g'ri chiziq o'tkazilgan. Agar a va c to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa 1,5 m ga, b va c to'g'ri chiziqlar orasidagi masofa 0,8 m ga teng bo'lsa, a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani toping (118- rasm).

51. A (1; 2; 3) nuqta berilgan. Bu nuqtadan koordinata o'qlariga va koordinata tekisliklariga tushirilgan perpendikularlar asoslarini toping.

52. (1; 2;−3) nuqtadan: 1)koordinata tekisliklarigacha; 2) koordinata o'qlarigacha; 3) koordinatalar boshigacha bo'lgan masofalarni toping.

53. A (1; 2; 3) nuqtadan va koordinatalar boshidan baravar uzoqlashgan fazo nuqtalarining geometrik o'rni tenglamasini tuzing.

54. Uchlari: 1) A (0; 2; −3), B (−1; 1; 1), C (2; −2; −1) D (3;−1;−5); 2) A (2; 1; 3), B (1; 0; 7), C (−2; 1; 5), D (−1; 2; 1) nuqtalarda bo'lgan $ABCD$ to'rtburchakning parallelogramm ekanini isbotlang.

55. Kesmaning bir uchi A (2; 3;−1) va uning o'rtasi C (1; 1; 1) berilgan. Kesmaning ikkinchi uchi B (x; y; z) ni toping.

56. Oxirlari C (a; b; c) va D (p; q; $-c$) nuqtalarda bo'lgan kesma o'rtasining xy tekislikda yotishini isbotlang.

57. Ushbu (1; 2; 3), (0; −1; 2), (1; 0; −3) nuqtalar berilgan. Bu nuqtalarga koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalarni toping.

58. Tekislikka nisbatan simmetriya almashtirishi harakat ekanini isbotlang.

59. To'g'ri chiziqda yotgan uch nuqta fazoda harakatlanganda yana bitta to'g'ri chiziqda yotuvchi uch nuqtaga o'tishini isbotlang.

60. Parallel ko'chirishda A (2; 1; −1) nuqta A' (1; −1; 0) nuqtaga o'tadi. Koordinatalar boshi qanday nuqtaga o'tadi?

61. To'rtta parallel to'g'ri chiziq parallel tekisliklarni mos holda $ABCD$ va $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammlarning uchlarida kesib o'tadi. $ABCD$ va $A_1B_1C_1D_1$ parallelogrammlar parallel ko'chirish natijasida ustma-ust tushishini isbotlang.

62. a to'g'ri chiziq α tekislikda yotadi, b to'g'ri chiziq esa bu tekislikka perpendikular holda yotadi. a va b to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak nimaga teng?

63. a, b, c to'g'ri chiziqlar ayni bir tekislikka parallel. Agar b va c to'g'ri chiziqlarning a to'g'ri chiziq bilan hosil qilgan burchaklari 60° va 80° ga teng bo'lsa, b va c to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak nimaga teng?

64. Og'ma a ga teng. Agar og'ma tekislik bilan: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30° ga teng burchak tashkil etsa, bu og'maning tekislikdagi proyeksiyasi nimaga teng?

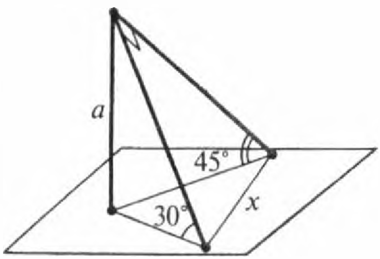
65. Tekislikda a masofada yotgan nuqtadan tekislik bilan 45° va 30° li burchaklar, o'zaro esa to'g'ri burchak tashkil etadigan ikkita og'ma o'tkazilgan. Og'malarning oxirlari orasidagi masofani toping (119- rasm).

66. Tekislikdan a masofada yotuvchi nuqtadan tekislikka 30° burchak ostida ikkita og'ma o'tkazilgan bo'lib, ularning proyeksiyalari 120° li burchak tashkil etadi. Og'malarning oxirlari orasidagi masofani toping.

67. Agar kesishadigan ikkita tekislikning birida olingan nuqta tekisliklarning kesishgan to'g'ri chizig'idan ikkinchi tekislikka qaraganda ikki marta uzoqroqda joylashgan bo'lsa, bu ikki tekislik orasidagi burchakni toping.

68. To'g'ri burchakli uchburchakning katetlari 7 m va 24 m ga teng. To'g'ri burchakning uchidan gipotenuza orqali o'tuvchi va uchburchak tekisligi bilan 30° li burchak tashkil etuvchi tekislikkacha masofani toping.

69. Tomoni a ga teng bo'lgan teng tomonli uchburchak berilgan. Uchburchak tekisligi bilan: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° ga teng burchak tash-



119- rasm.

kil qilgan tekislikka tushirilgan uning ortogonal proyeksiyasi yuzini toping.

70. Uchta nuqta berilgan: A (1; 0; 1), B (−1; 1; 2), C (0; 2;−1). Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlar teng bo'lsa, D (x; y; z) nuqtani toping.

71. Agar 70- masalada $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ vektorlarning yig'indisi nolga teng bo'lsa, D nuqtani toping.

72. $\overline{a}$ va $\overline{b}$ vektorlar 60° li burchak tashkil etadi, $\overline{c}$ vektor esa ularga perpendikulyar. $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$ vektorning modulini toping.

73. Uchta nuqta berilgan: A (0; 1;−1), B (1;−1; 2), C (3; 1; 0). ABC uchburchak C burchagining kosinusini toping.

74*. Tekislik tashqarisidagi nuqtadan perpendikulyar va u bilan α burchak tashkil etuvchi ikkita teng og'ma o'tkazilgan. Og'malar orasidagi burchak β ga teng bo'lsa, og'malarning proyeksiyalari orasidagi φ burchakni toping.

Masalalarga doir javoblar va ko'rsatmalar

Planimetriya mavzularini takrorlash

1. 1,2 m; 2) 2,4 sm. **2.** Mumkin emas. **3.** 1) 3,2 m, 6,2 m, 6,2 m; 2) 7,2 m, 4,2 m, 4,2m. **6.** 4 m. **8.** 70° va 110°. **9.** (0; 1); (−2; 0); (−2; 1). **10.** 1) $x+y-5=0$; 2) $3x+10y-2=0$; 3) $x+6y+13=0$. **12.** $y=3$. **13.** 1) $\overline{c}$ (−3; 4), $|\overline{c}|=5$; 2) $\overline{c}$ (6; 8), $|\overline{c}|=10$. **14.** $\overline{c}$ (−6; −8), $|\overline{c}|=10$. **15.** $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}$, $m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}$, $m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)-c^2}$. **16.** 1 m, 2 m, 2,5 m. **17.** 1) $c\approx 8{,}69$, $\beta°\approx 21°$, $\gamma\approx 39°$; 2) $c\approx 19{,}6$, $\beta\approx 13°$, $\gamma\approx 29°$; 3) $c\approx 22{,}3$, $\beta\approx 6°$, $\gamma\approx 10°$.

Stereometriya

1- §.

5. Ko'rsatma. Nuqtani boshqa tekislikda oling va bu nuqta hamda berilgan to'g'ri chiziq orqali tekislik o'tkazing. Bu tekislikka parallel to'g'ri chiziqlar aksiomasini tatbiq qiling.

2- §.

3. 1) 6 m; 2) 4,2 dm; 3) 6,2 sm; 4) $\frac{a+b}{2}$. **4.** 1) 1 m; 2) 0,6 dm; 3) 2,1 sm; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. **5.** 1) 7 m; 2) 2 m; 3) $a+c-b$.

18. $A_1B_1 = a$. **20**. Ko'rsatma. Ikki ixtiyoriy to'g'ri chiziq kesmalarining nisbatini taqqoslang: $X_1\ X_2X_3$ va $Y_1\ Y_2Y_3$. **22.** Yo'q. **23.** Mumkin. **24.** Ko'rsatma. Kesmalarning nisbati saqlanadi.

3- §

2. 1) 6,5 sm; 2) 15 sm; 3) $\sqrt{a^2-b^2+d^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. **5.** $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. **9.** $\approx$3,9 m. **10.** 9m. **12.** 1 m. **13.** $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. **14**. Aylana. **15.** 1) 15 sm, 41 sm; 2) 4 sm, 8 sm. **17**. 6 m. **18**. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. **20.** $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. **23.** 0,6 m. **24.** $\frac{am}{m+n}$ (m tekislik o'tkazilgan asosga mos keladi). **25**. Perpendikularning uzunligi $\sqrt{2a^2-b^2}$, tomonining uzunligi $\sqrt{b^2-a^2}$. **26**. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. **27**. $2\sqrt{2}$ m. **29**. 6 m. **30.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **31.** $\sqrt{2b^2-a^2}$. **32.** $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^2}{a^2}}$. **34.** 4 m. **35**. 1) 11 m; 2) 13 m; 3) 8 m; 4) 7 m; 5) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **36**. 1,3 m.

4- §

1. z o'qda. **4.** (2; 2; 2) va (−2; −2; −2). **5.** C (0; 0; 0). **8.** 1) D (6; 2; −2); 2) D (0; −2; 2); 3) D (−1; 7; −2). **15.** 1), 2), 4) Mavjud emas; 3) mavjud. **19.** $\alpha+\beta$ yoki $|\alpha+\beta|$. **23.** 30°. **24.** $a\sqrt{2}$. **25.** 1) 30°. **28.** 13 m; $\sqrt{409}$. **29.** 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. **30.** 1) $\frac{30}{7}$ m² yoki 48 m²; 2) 2,5 m² yoki $\frac{128}{7}$ m². **32.** $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{3}{2}$. **34.** $c=1$. **35.** 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. **38**. 60°.

10- sinf geometriya kursini takrorlash uchun masalalar

1. Mumkin. **5.** To'rtta tekislik. **6.** Ko'rsatma. Teskarisidan isbotlashdan foydalaning. **7.** Mumkin emas. **9.** 1) 37,5 sm;

2) 9,9 sm; 3) 15 sm; 4) $C\left(1+\frac{b}{a}\right)$. **10.** Mumkin emas. **12.** 1) 5 sm; 2) 3 sm; 3) 8 sm; 4) $\frac{bc}{a+c}$. **16.** Har doim emas. K o ' r s a t m a.

13- masalaga qarang. **18.** Agar nuqta to'g'ri chiziqlar tekisligida yotsa, yechim yo'q. **22.** O'rta chiziq bilan. **24.** K o ' r s a t m a. Perpendikular diametrning proyeksiyasi berilgan diametr proyeksiyalariga parallel bo'lgan vatarlarning o'rtasidan o'tadi. **27.** 2 m. **30.** 2,6 m. **31.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. **32.** 6,5 m. **33.** 6 sm, 15 sm. **34.** 9 sm. **35.** 5 m, 3 m. **36.** $\sqrt{b^2-a^2}$. **37.** 0,36 m yoki 0,44 m. **38.** 1) 4,25 sm; 2) 6,75 sm; 3) $\frac{a+b}{2}$. **39.** 1) 1,05 sm; 2) 0,65; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. **40.** $\frac{a}{2}$. **41.** 2 m. **42.** 2,5 m. **43.** 14 sm. **44.** $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. **45.** 2,5 m. **46.** K o ' r s a t m a. Tekislikka perpendikular to'g'ri chiziqlar parallel. **47.** $\sqrt{23}$ m. **49.** $\sqrt{a^2+b^2}$. **50.** 1,7 m. **51.** (1; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 3), (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3). **52.** *xy* tekislikdan masofasi 3, *xz* tekislikdan masofasi 2, *yz* tekislikdan masofasi 1 ga teng; *x, y, z* o'qlardan masofalar, mos ravishda, $\sqrt{13}, \sqrt{10}, \sqrt{5}$; koordinatalar boshidan masofasi $\sqrt{14}$ ga teng. **53.** $x + 2y + 3z = 7$. **55.** B (0; −1; 3). **57.** (−1; −2; −3); (0; 1; −2); (−1; 0; 3). **60.** (−1; −2; 1). **62.** 90°. **63.** 40°, yoki 20°. **64.** 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **65.** $a\sqrt{6}$. **66.** 3 a. **67.** 30°. **68.** 3,36 m. **69.** 1) $\frac{3a^2}{8}$; 2) $\frac{a^2\sqrt{6}}{8}$; 3) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. **70.** D (−2; 3; 0). **71.** D (2; 1; −2). **72.** $\sqrt{|a|^2+|b|^2+|c|^2+|a||b|}$. **73.** $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$.

74. $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

MUNDARIJA

ALEKSEY VASILYEVICH POGORELOV

GEOMETRIYA

Umumta'lum maktablarining 10- sinfi uchun darslik

3- nashri

„O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent — 2005

Tarjimon **M. Sa'dullayev**
Muharrir **N. G'oipov**
Rasmlar muharriri **M. Kudryashova**
Tex.muharrir **S. Tursunova**
Kompyuterda sahifalovchi **F. Sodiqova**
Musahhih **M. Ibrohimova**

IB № 8526

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 22.04.05 Bichimi 84 × 108 $^1/_{32}$.
Kegli 11 shponli. Tayms. garn. Ofset bosma usulida bosildi. Bosma t. 7,0.
Shartli b.t. 5,88. Nashr. t. 5,3. 5000 nusxada bosildi.
Buyurtma №189 Bahosi 900 so'm.

O'zbekiston Matbuot va axborot agentligining „O'qituvchi" nashriyot-matbaa ijodiy uyi. Toshkent — 129, Navoiy ko'chasi, 30- uy. //Toshkent, Yunusobod dahasi, Murodov ko'chasi, 1- uy.
Shartnoma № 09—83—05.

693c

~~900~~ s.

"O'QITUVCHI"